



図説

土木工学
基礎講座

構造力学

依田照彦
佐藤尚次
井浦雅司
白木恒雄一著

彰国社

まえがき

構造物に限らず、形のあるものは、何か必然性がある、あるいはしくみがある、そのような形になっているのではないかと考えてみる。そして、形のあるものには何らかのしくみがありそうだと結論づける。このしくみを構造と呼び、しくみである構造を、力学を用いて調べようとする学問が構造力学である。したがって、人類が形あるものをつくりはじめたときから、構造力学が存在していたと考えてよい。現存しているエジプトのピラミッドの建設時期から類推しても、構造力学の歴史は5000年をゆうに超えるものである。構造力学のすべてを理解する、あるいは、理解させるには、厳密に言えば、5000年以上の歳月を要するのかもしれない。しかし、構造力学の学習や教育に費やせる時間は一般に限られている。したがって、5000年以上の構造力学に関する知識を、本質を見失うことなく、効率よく集約しなければならない。このことを実現するためには、使えるすべての手段を用いて、構造力学の知識と知恵を整理してまとめ上げる必要がある。構造力学を基礎から応用まで広くカバーした本を書こうということで集まった4名の思いはここにあった。

本書をまとめるにあたって配慮した点を述べる。まず、最大のものは、先人の残した知恵と知識に学ぶことを第一番めに考えた点である。このために、世界中の構造力学の書籍や論文を過去から現在まで参照することとした。現在ではあまり利用されていない過去の優れた構造解析手法を取り入れたのもこのような理由からである。コンピュータが大いに発達し、構造解析の多くの部分がブラックボックス化し、簡単な構造力学の知識だけで何とかなる場合も増えてきたように思う。しかしながら、著者らは、コンピュータが発達すればするほど、もしかすると基本的で深い構造力学の知識が必要なのではないかと感じている。この目的には先人の知恵を利用するのが一番よいと考えている。また、構造力学が好きになり、楽しくなるのも、先人の深い洞察力に感激したときではないかとも思う。たとえば、仮想仕事の原理がわかったときの感激を今でも忘れないという思い出を持つ技術者が少なくないことがそれを物語っている。この感激を若い人を含めて多くの人に味わってもらいたいと思うのは、われわれだけではないような気がする。

二番めは、構造力学の過去の蓄積を短期間で効率的に理解するために、数学の知識を最大限利用することを考えた点である。難しい数学を利用しようとするのではなく、構造力学の本質を変えずに、数学的にわかりやすい手段で構造力学の内容を説明し、過去の知識のうち論理的に理解できる部分は、数学の知識によって理解を加速させることを意図した。このような観点から、最初は身の回りの実感できる物理現象から入り、その後数学的手法を適宜適切な形で利用することにした。

三番めは、コンピュータの利用に十分配慮しようとした点である。コンピュータの利用なくしては現在の構造力学は考えられないことは事実である。その一方で、実際に構造物をつくるのは、コンピュータではなく、人間である。現時点では、人間がコンピュータを

利用するという立場が自然であるとの判断から、コンピュータの利用レベルに合わせた構造解析手法を準備した。したがって、構造解析手法のレベルとしては、紙と鉛筆で行う手計算のレベルからコンピュータを利用するレベルまでを意識した。

四番めは、構造力学を体感できるように、なるべく身近な例を取り上げ、図を用いて視覚的にわかりやすくなるよう配慮した点である。本来であれば、実験や現場見学などにより実際の挙動を観察し、各自が自分の手で観察したことを描き、手づくりの図を作成するのがよいと思われるが、本の世界の中では、そこまではできないので、できる限り数多くの構造物の挙動を観察する機会を持って、構造力学の知識の充実を図っていただきたい。

五番めに、わかるということを実感してもらうために、各章に若干ではあるが、演習問題を設けた。わかるとはどういうことか迷うことがしばしばある。いろいろな問題を解いてみて、矛盾なく何時でも正解が得られれば、わかったと考えてよい。理解の程度に段階があることも否めない事実であるので、理解したと思ったことについても迷いが出るかもしれない。そのときには、より高い段階への準備期間であると考えて、努力を続けてほしい。

以上のような目標を達成するために、本書では全体の章構成を大きく二つに分けた。構造力学の基礎にあたる第一段階は、力のつり合いだけで構造力学が理解できる部分（これを静定構造の力学という）であり、第1章から第5章までがこれにあたる。構造力学の応用にあたる第二段階は力のつり合いだけでなく構造物の変形をも考慮に入れて構造力学を理解しなければならない部分（これを不静定構造の力学という）であり、第7章から第11章がこれにあたる。第6章のエネルギー定理は、基礎と応用を関係づける定理であり、コンピュータの利用を前提とする場合には、欠かせない部分である。

このように、本書は構造力学の基礎から応用までをまとめたものであるが、構造力学に関連する分野がきわめて広いため、ねじりの問題や弾塑性の問題、板やシェルの問題など興味深いテーマを取り上げることができなかった。幸いなことに、本書の執筆にあたって参考にさせていただいた多くの書籍や論文の中に、これらのテーマに関する記述があるので、ぜひともこれらの書物を参考にして、構造力学に関する知識を深めていただきたい。

最後に、本書の刊行に際して、彰国社の中山重捷氏には、終始変わらぬご支援を受けました。心から感謝を申し上げます。

1999年5月

著者一同

目次

まえがき	3
1 序論	9
1-1 構造力学の内容	9
1-2 構造物のモデル化	9
1-3 構造物の形	10
2 構造力学の基礎	13
2-1 力の性質	13
2-2 力のつり合い	18
2-3 荷重・反力・断面力	19
2-4 応力とひずみ	22
2-5 材料の性質と応力-ひずみ関係	23
2-6 構造力学の基本3条件式	24
3 静定トラス	27
3-1 トラスに関する基礎知識	27
3-2 トラスの軸力（節点法・切断法）	30
3-2-1 外的静定・不静定	30
3-2-2 節点法と内的静定・不静定	31
3-2-3 切断法	32
3-3 軸力部材の基礎方程式	34
3-4 静定トラスの補足	35
4 静定はり	38
4-1 はりに関する基礎知識	38
4-2 断面力の定義	39
4-3 断面力（ Q 図、 M 図）の求め方	40
4-4 断面諸量	42
4-4-1 断面1次モーメント	42
4-4-2 断面2次モーメント	43
4-4-3 断面相乗モーメント	44
4-4-4 断面2次半径	44
4-4-5 断面係数	44

5 はりのたわみ	47
5-1 幾何学的準備	47
5-2 基礎方程式	48
5-3 面積モーメント法と Mohr (モール) の定理	50
6 エネルギー原理	55
6-1 はりの仮想仕事の原理と補仮想仕事の原理	55
6-1-1 仮想仕事の原理	55
6-1-2 補仮想仕事の原理	56
6-2 トラスの仮想仕事の原理と補仮想仕事の原理	58
6-2-1 仮想仕事の原理	58
6-2-2 補仮想仕事の原理	59
6-3 変分法	59
6-4 最小ポテンシャルエネルギーの定理	60
6-5 最小コンプリメンタリエネルギーの定理	61
6-6 Castigliano (カスティリアーノ) の定理	62
7 不静定構造	64
7-1 不静定構造の基礎知識	64
7-1-1 解法の内容	64
7-1-2 解法の流れと特徴	64
7-2 応力法	65
7-2-1 不静定次数	65
7-2-2 応力法の内容	67
7-2-3 仮想力の原理による応力法の一般式	69
7-2-4 応力法の数値計算例	72
7-2-5 不静定構造物の変位量の計算	76
7-3 たわみ角法	78
7-3-1 たわみ角法の基礎事項	78
7-3-2 たわみ角法の未知変位量の総数	78
7-3-3 変位量の幾何学的関係	79
7-3-4 材端モーメント公式	81
7-3-5 固定端モーメントの計算例	86
7-3-6 力のつり合い条件	88
7-3-7 構造系の変形形態	89
7-3-8 たわみ角法の数値計算例	90

8 マトリックス法	103
8-1 マトリックス法の基礎事項	103
8-2 弾性マトリックス法	103
8-3 剛性マトリックス法	107
8-4 弾性マトリックス法と剛性マトリックス法の対比	111
9 影響線	112
9-1 影響線の定義と意義	112
9-2 静定構造の影響線	112
9-2-1 断面力の影響線	112
9-2-2 変形量の影響線	117
9-2-3 ω 関数表	118
9-3 不静定構造の影響線	119
9-3-1 応力法による影響線	119
9-3-2 たわみ角法による影響線	124
10 はりの応力	127
10-1 弾性理論に基づく応力の分布	127
10-1-1 はじめに	127
10-1-2 軸方向力による直応力	127
10-1-3 曲げモーメントによる直応力	127
10-1-4 2軸曲げ	129
10-1-5 軸方向力と曲げモーメントを同時に受ける場合	131
10-1-6 せん断力によるせん断応力	131
10-2 主応力と Mohr (モール) の応力円	134
10-2-1 Mohr (モール) の応力円	134
10-2-2 主応力	135
10-2-3 主応力の例	136
10-2-4 モール・クーロンの破壊規準	137
10-3 設計における応力の考え方	140
10-3-1 概説	140
10-3-2 曲げを受ける断面の効率化	140
10-3-3 限界状態設計法と許容応力度法	142
11 柱	144
11-1 長柱	144
11-2 短柱	147
巻末資料	189
索引	194

4 静定はり

4-1 はりに関する基礎知識

はりとは何かを説明する前に、図4-1に示すようにまっすぐな棒をA-A'軸と直交する面で切断し、その両面S⁺、S⁻に生じる断面力（合力と合モーメント）を考える。第2章で説明したように、切断した面の両側には向きが逆で大きさが等しい断面力が生じる。座標系として図4-2に示す右手系直交座標系を採用し、座標軸としてy、z軸を断面内に、x軸をA-A'軸と一致するようにとる。このとき、一般に、x、y、z軸と平行な合力と、x、y、z軸回りの合モーメントが生じる。棒の断面内にx軸と平行な合力（軸力）のみが生じる場合が、第3章で扱ったトラスである。また、x軸回りの合モーメントのみが生じる場合が、棒のねじれであり、中でもSt. Venant（サンブナン）のねじれが有名であるが、本書では扱わない。はりとは、y、z軸と平行な合力（これをせん断力と呼ぶ）と、y、z軸回りの合モーメント（これを曲げモーメントと呼ぶ）が生じる場合であり、そのために外力はx軸と直交し、外モーメントはy、z軸回りに作用しなければならない。図4-3にはS⁻面における正の断面力を示しており、S⁺面における正の断面力はこれとは向きが逆となる。本書ではx、z軸面内で変形するはりを考えることとし、このとき、はりに生じる断面力はz軸と平行なせん断力とy軸回りの曲げモーメントであり、作用荷重はz軸と平行な外力と、y軸回りに作用する外モーメントを考える。

はりの支持方法には、図4-4に示すように、埋込み端、固定ヒンジ、可動ヒンジ、自由端の4種類がある。それぞれの支持方法における反力の数は3、2、1、0となる。これら反力が、力のつり合い式だけで決定されるとき、このはりを静定はりという。一方、力のつり合い式だけでは決定されず、変形の適合条件を併用する必要

があるとき、これを不静定はりという。図4-5に静定はりとは異なる例を示した。すなわち、図4-5(a)においては未知反力は3個であり、x、z軸方向の力のつり合い式とy軸回りのモーメントのつり合い式を立てることにより3個の未知反力は求められる。一方、図4-5(b)における未知反力は4個であり、使えるつり合い式の数は図4-5(a)と同一の3個であるから、未知反力はつり合い式だけでは求められない。不静定はりについては第7章で詳しく説明する。

さて、図4-6に示すはりを考えよう。図4-5(b)との差異は、はりの中間部にヒンジが存在することである。ヒンジはモーメントを伝達しないから、ヒンジの左側あるいは右側の外力と反力がつくるヒンジ回りのモーメントの総和はゼロでなければならない。よって、先に説明した3個のつり合い式のほかに、上記の条件式が一つ加わり、合計で4本のつり合い式が求められる。これにより4個の未知反力が求められることになる。このように、は

りの中間にヒンジが存在するはりをゲルバーはりと呼ぶ。なお、ヒンジの左側と右側でそれぞれモーメントのつり合い式が作成できることから、合計5本の式が得られるように思えるが、独立な式の数は4本である。

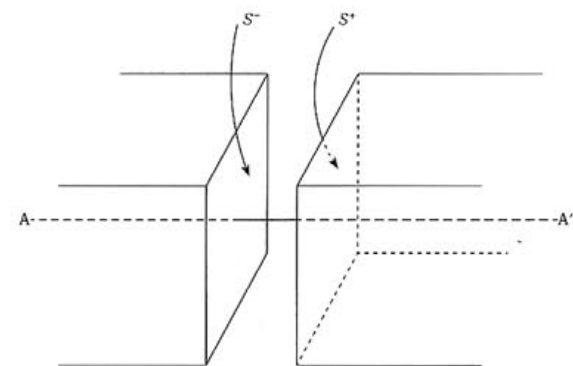


図4-1 棒の切断面

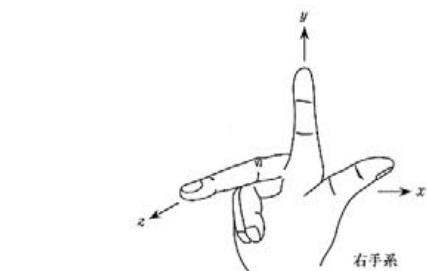


図4-2 右手系直交座標系

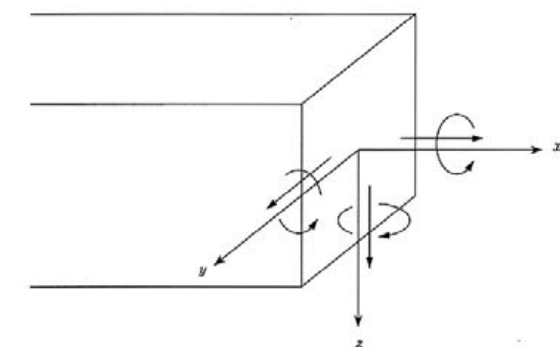


図4-3 断面力

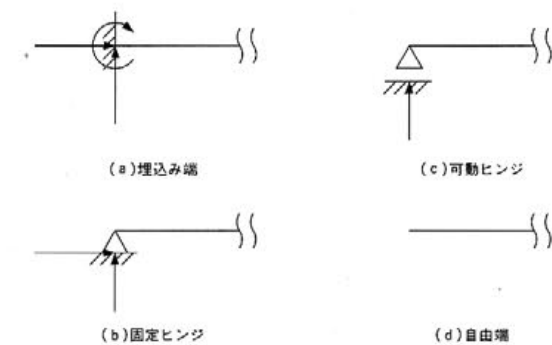


図4-4 支持方法

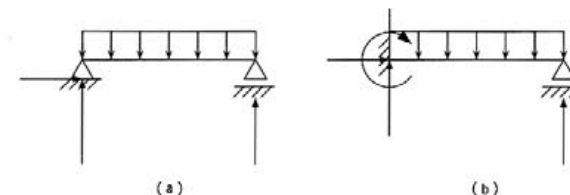


図4-5 静定はりとは異なる例

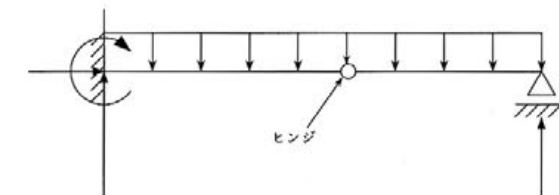


図4-6 ゲルバーはり

りの中間にヒンジが存在するはりをゲルバーはりと呼ぶ。なお、ヒンジの左側と右側でそれぞれモーメントのつり合い式が作成できることから、合計5本の式が得られるように思えるが、独立な式の数は4本である。

4-2 断面力の定義

図4-3に示すはりにおいて、せん断力Qと曲げモーメントMが存在しているが、ここではこれらの断面力がどのようにして生じたかを考える。第2章2-3節において説明したように、物体を切断するとその面に応力が生じる。はりの場合は、図4-7に示すように、はりの断面に垂直に作用する垂直応力σと、断面に平行なせん断応力τが生じる。垂直応力σは図4-8に示すように断面内で直線的に変化し、その値がゼロとなる点が図心である。ここでは、図心と座標系の原点は一致している

ものとする。なお、せん断応力の分布については第10章10-1-6において説明する。これら応力と断面力との関係は以下のように定義される。

$$N = \int_A \sigma dA, \quad M = \int_A z \sigma dA, \quad Q = \int_A \tau dA \quad (4.1 a, b)$$

すなわち、σdAおよびτdAは、それぞれ微小面積dAに作用するx方向の力とz方向の力である。

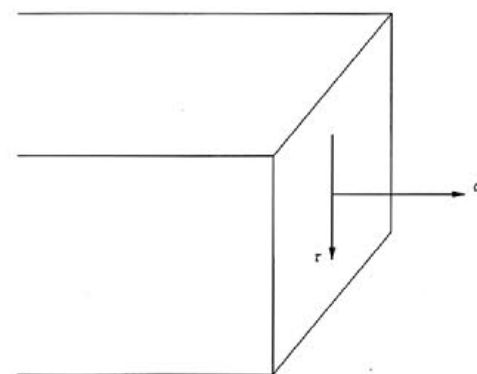


図4-7 垂直応力とせん断応力

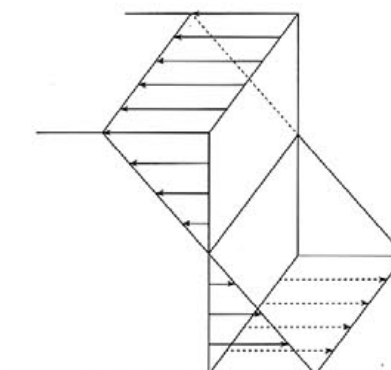
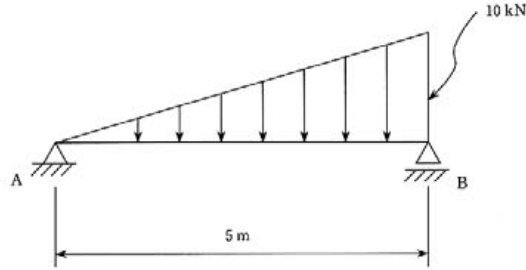


図4-8 垂直応力の分布

演習問題④

問題 4-1

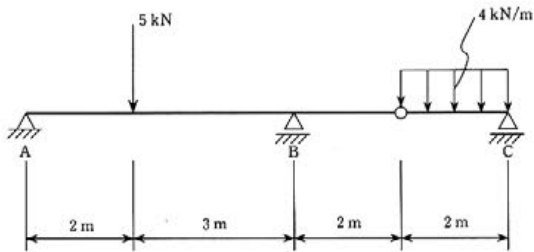
問題図 4-1 に示すはりのせん断力図と曲げモーメント図を求めよ。



問題図 4-1

問題 4-2

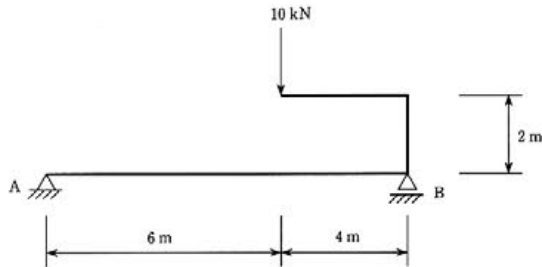
問題図 4-2 に示すはりのせん断力図と曲げモーメント図を求めよ。



問題図 4-2

問題 4-3

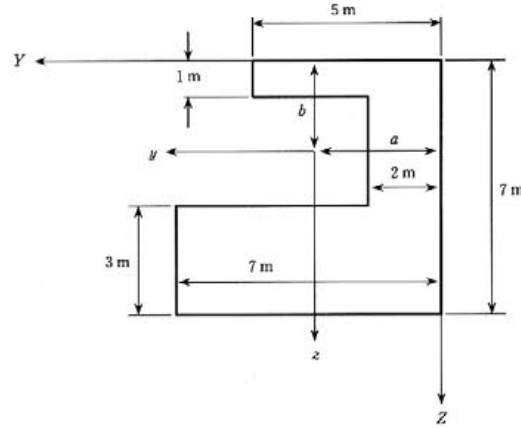
問題図 4-3 に示すはり AB のせん断力図と曲げモーメント図を求めよ。



問題図 4-3

問題 4-4

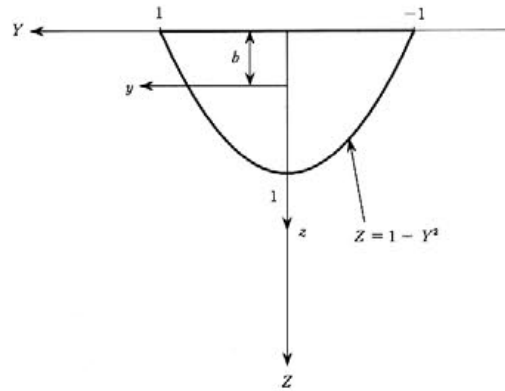
問題図 4-4 に示す断面の図心と、図心を通る軸に関する断面 2 次モーメントを求めよ。



問題 4-4

問題 4-5

問題図 4-5 に示す断面の図心と、図心を通る軸に関する断面 2 次モーメントを求めよ。



問題図 4-5

(解答は巻末)

5 はりのたわみ

5-1 幾何学的準備

はりの変形に関して以下の仮定を設ける。

- ①変形は微小であり、応力とひずみの関係は線形である。
- ②変形前の横断面は、変形後もその形状を変えない。
- ③変形前に中立軸に垂直な横断面は、変形後も中立軸に垂直である。

仮定①は、はりに外荷重が作用したとき、はりは大きな変形をしないとする仮定である。仮定②は、横断面の形状が変形により歪むことなく、常に一定であることを意味している。仮定③は、図 5-1 に示すように、変形後の横断面と中立軸が垂直でないような変形はしないと仮定している。図 5-1 に示すような変形は、はりの長さ L とはりの高さ h との比 L/h が小さいときに観察される。比 L/h が大きくなると、図 5-1 に示すような変形の影響は小さく無視できることが知られている。仮定②、③を用いることにより、はりの変形は中立軸で代表されることになる。すなわち、変形後の中立軸の位置がわかれば、それに直交する面に横断面が存在し、その形状は変形前後で不変であることから、はりの全体の変形が求まることになる。

さて、上記の仮定の下ではりの変形を考える。図心に原点を有する座標系 x, y, z において、座標値 x と $x + dx$ に囲まれたはりを考え、それがある荷重下で変形した状態を示したのが図 5-2 である。点 A, B は中立軸上にあり、点 A における z 軸方向の変位（「たわみ」と呼ぶ）を $w(x)$ 、点 B のたわみを $w(x + dx)$ とする。変形後、点 A, B はそれぞれ点 A', B' へ移動する。点 A' におけるたわみ曲線の接線と x 軸とのなす角度（「たわみ角」と呼ぶ）を $\theta(x)$ 、点 B' のたわみ角を $\theta(x + dx)$ とする。中立軸では垂直応力がゼロであることから変形前後で長さが不変であり、A'B' 間の距離は変形前後で dx のままである。図 5-2 では A'B' 間の距離が dx よりも大きめに描いてあるが、これは変形を見やすくするために拡大して描いたためである。微小区間

dx のはりは変形後において円弧の一部と考えられ、円弧の角度を α 、円弧の中心から中立軸までの距離を r とすれば、次式が成立する。

$$r\alpha = dx \tag{5.1}$$

また、幾何学的関係より以下の関係式を得る。

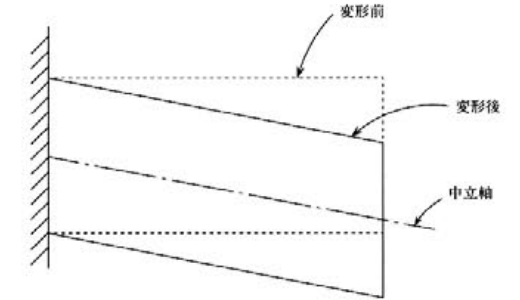


図 5-1 はりのせん断変形

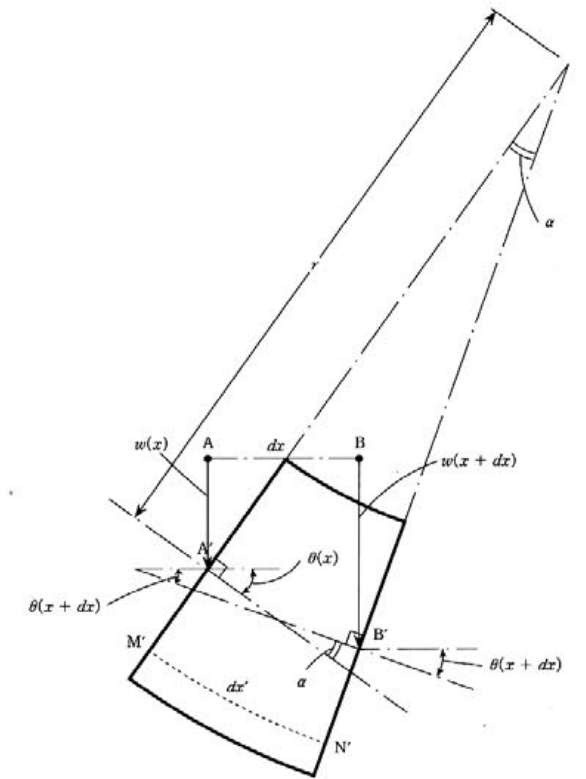


図 5-2 はりの変形

[法則 4] 三つの部材間に存在する三つの相対回転中心点は一直線上にある (図 7-35)。

記号 $a, b \mid c, d \mid e$ は、点 a と点 b を結ぶ線と、点 c と点 d を結ぶ線の交点を点 e とすること、を意味している。

法則 1 から法則 3 までは自明である。法則 4 は以下のごとく説明できる。

今、便宜的に図 7-36(a) のとき 3 個の部材 ①, ②, ③ よりなる 1 次不安定構造系 ADEC を考える。そして、図中の相対回転中心点 (1, 3) が他の相対回転中心点 (1, 2) と (2, 3) を結ぶ線上にあることを証明する。しかし、点 (1, 3) は法則 3 より、絶対回転中心点 I と III を結ぶ線の上にもなければならないから、結局、点 (1, 3) は図 7-36(a) の点 F に一致することを証明すればよい。部材 2 の絶対回転中心点 II は、法則 3 よりただちに求まる。この点を B と呼ぶことにする。次に、点 C より線分 AD に平行な線を引き、線分 EF との交点を G とする。すると $\triangle ECG$ および $\triangle EBD$ は相似三角形となり、

$$CG : CE = BD : BE \implies CG = \frac{CE \cdot BD}{BE} \quad (7.74)$$

点 D が部材 1 と 2 の相対回転中心点であることから

$$AD \cdot \omega_1 = BD \cdot \omega_2$$

点 E が部材 2 と 3 の相対回転中心点であることから

$$CE \cdot \omega_3 = BE \cdot \omega_2$$

これらから、次の関係式を得る。

$$\frac{AD}{BD} = \frac{\omega_2}{\omega_1}, \quad \frac{BE}{CE} = \frac{\omega_3}{\omega_2}$$

式 (7.74) およびこの 2 本の式を用いると、 $\triangle AFD$ と $\triangle CFG$ の相似から

$$\frac{AF}{CF} = \frac{AD}{CG} = \frac{AD}{BD} \cdot \frac{BE}{CE} = \frac{\omega_2}{\omega_1} \cdot \frac{\omega_3}{\omega_2} = \frac{\omega_3}{\omega_1}$$

となる。これから、

$$AF \cdot \omega_1 = CF \cdot \omega_3$$

となる。これは点 F が部材 1 および部材 3 の相対回転中心点であることを意味する。図 7-36(b) にそのイメージを図示した。図 7-37 に視察でただちにわかる回転中心点および方向線を示した。

7-3-8 たわみ角法の数値計算例

非対称の台形門形骨組構造物 (図 7-38) に 5 種類の

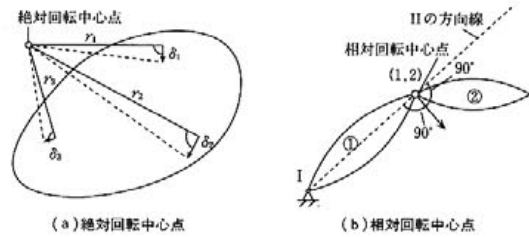


図 7-34 回転中心点

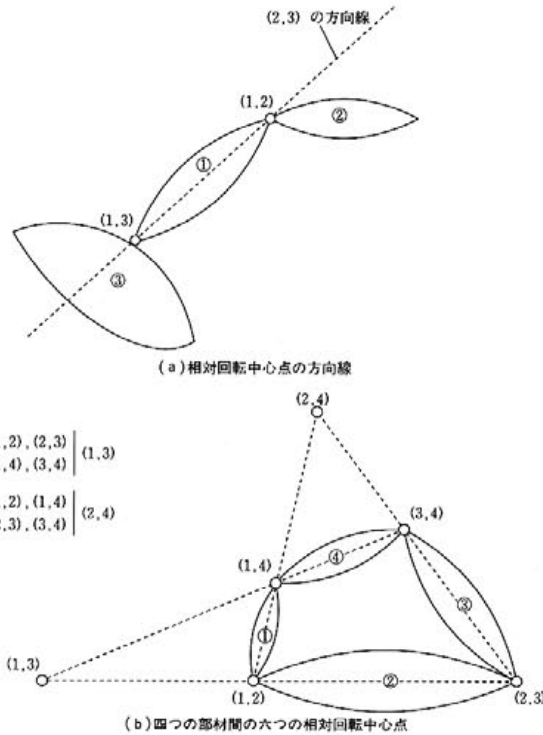


図 7-35 相対回転中心点

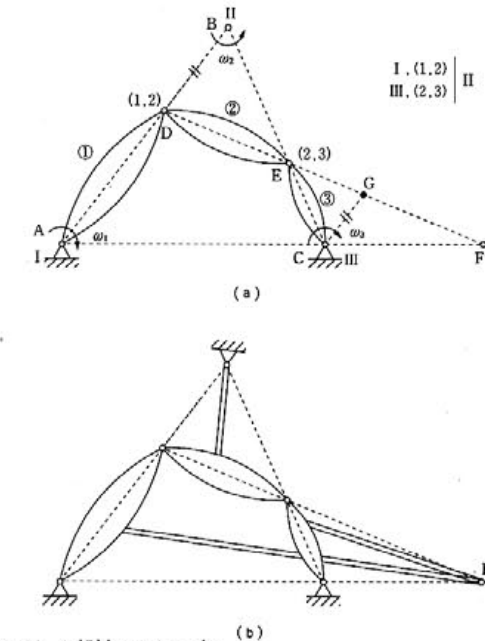


図 7-36 3部材のメカニズム

荷重が個別に作用するとして、それぞれの場合のモーメント図をたわみ角法を用いて求めよ。ただし、曲げ剛性 EI ($\text{kN} \cdot \text{m}^2$), 桁高 h (m), 線膨張係数 α ($1/^\circ\text{C}$) は全部材等しいとする。軸力変形およびせん断変形は無視できるものとする。

荷重の種類

- 1 部材 bc に等分布荷重 q (kN/m)
- 2 節点 b に水平集中荷重 P (kN)
- 3 部材 bc に温度差 ΔT ($^\circ\text{C}$)
- 4 部材 bc に温度上昇 T_s ($^\circ\text{C}$)
- 5 支点 a の鉛直方向沈下量 Δv_a (m)

[解答]

(1) 未知変位量の設定

右下の図のごとく二つの \square と一つの $\mid \triangleright$ により節点 b, c の回転および節点 b の水平変位を固定することができる (図 7-39(a))。たわみ角法の未知変位量の数は $c^* = 3$ である。そこで、点 b, 点 c のたわみ角 θ_b, θ_c と部材 ab の部材角 R_{ab} を未知変位量に採用する。

(2) 幾何学的関係

点 a, 点 d は埋込み端だからたわみ角はゼロである。すなわち次式となる。

$$\theta_a = 0, \quad \theta_d = 0$$

部材角 R_{ab}, R_{bc}, R_{cd} 間の関係を知るために、四つの節点 a, b, c, d にヒンジを挿入する。剛体変位図 (図 7-39(b)) より各部材の回転角には次の関係

$$4\omega_1 = 4\omega_2$$

$$5\omega_2 = 5\omega_3$$

がある。ゆえに、 $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3$ となる。しかし、各部材の部材角と回転角の間には

$$\omega_1 = \widehat{R}_{ab} \quad (\text{時計回り})$$

$$\omega_2 = -\widehat{R}_{bc} \quad (\text{反時計回り})$$

$$\omega_3 = \widehat{R}_{cd} \quad (\text{時計回り})$$

の関係があるから、結局次式を得る。

$$R_{bc} = -R_{ab}, \quad R_{cd} = R_{ab}$$

(3) 材端モーメント公式

材端モーメントの公式に、上記の幾何学的関係を用いる。

$$M_{ab} = \frac{EI}{4} (4\theta_a + 2\theta_b - 6R_{ab}) + C_{ab}$$

$$= \frac{EI}{2} \theta_b - \frac{3}{2} EIR_{ab} + C_{ab}$$

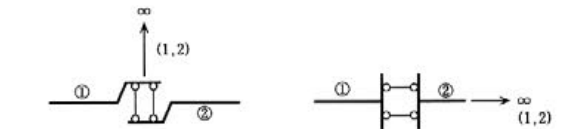
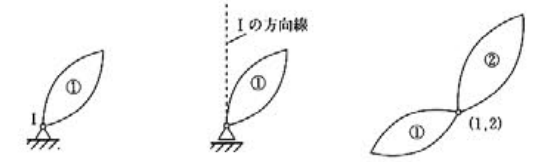


図 7-37 視察でわかる回転中心点

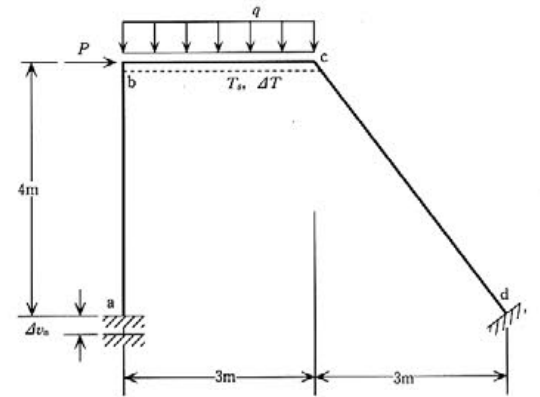
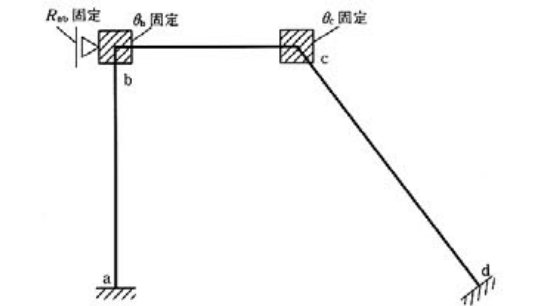
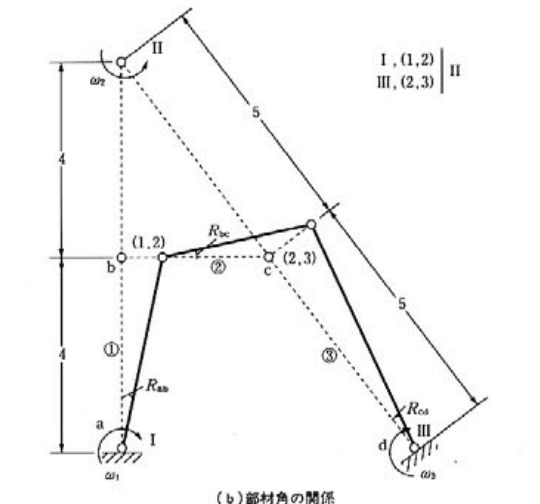


図 7-38 台形門形骨組構造物



(a) 変形固定状態



(b) 部材角の関係

図 7-39 未知変位量の種類