

考える
プロセスが
わかる

力の
つり合いを
理解する
構造力学

小野里憲一・西村彰敏 著

彰
国
社

考える
プロセスが
わかる

力の つり合いを 理解する 構造力学

小野里憲一・西村彰敏 著

彰
国
社

はじめに・本書の特徴

本書は大学の建築系学科において、最初に学ぶ「構造力学」の教科書としてかかれています。本書で学ぶのは力の性質と、力が構造物にどのような作用を及ぼすか？ です。**力のつり合いを理解し、簡単な静定構造物を解けるようになる**ことを目標としています。

構造力学は、苦手という学生が多いのですが、本書では、筆者が授業を進めていく上で、学生から寄せられた疑問や、授業でわかりにくさを感じているであろうポイントをなるべく拾って、内容を構成するよう努めました。

・イメージしにくい力学の現象を具体的に図解

力学の現象は、記号としての図だけでなく、人などを使ったイラストなどで表し、イメージをしやすいう工夫をしています。その際、簡単な実験などで試せることは「やってみよう」というコーナーで紹介しています。

・式中に力の向きを表示

学生が、構造力学を難しい、と感じる理由のひとつには、力やモーメントの正負について混乱があるのかもしれませんが。本書では、式中の、力やモーメントの値の上に、図中の力やモーメントの向きと一致するように、「←」「↓」「↻」などの記号を付けています。これにより、式の中の数値が、右向きの力か、下向きの力かなどがひとめでわかるようにしています（この表現については、岡島孝雄著『建築構造力学入門』理工学社、を一部、参考にしました）。

・吹き出しやメモで補足説明

学生からのちょっとした疑問や、理解の「つまずき」に答えられるよう、マンガのように吹き出しを設けて、コメントを入れています。読者の皆さんが、授業や、本を読んでいる、「これがわからなかった」という疑問のヒントとなれば幸いです。また、吹き出しは、自分が気になったことを、どんどん本にかきこんでいただきたいと思っています。

メモは、本文を読んでいる、より理解を深めてほしい事項をまとめています。本文や図だけを見て、理解できる方は読み飛ばしてもかまいません。

・バリエーション豊かで本質的な例題

構造力学の習得には、理屈を理解するだけでなく、実際に「解いてみる」ということが不可欠です。本書では、例題を実際に解いていくプロセスを「考え方」と称して、まとめていますが、ここを理解してもらうことがとても重要です。例題を理解したら「問題」に進みましょう。「問題」は、例題を解いた上で挑戦できる、さらに応用的な内容も含まれています。

授業では教科書の問題以外にも、いろいろな課題や試験問題、また、将来的にみなさんは建築士の試験にチャレンジするかもしれません。本書にまとめられた内容や例題を解くプロセスは、とてもベーシックで、構造力学の基礎を理解するための十分な内容を扱っています。自分で考える力が身についていれば、どんな問題が出てても怖くありません。本書で多くの学生さんが、構造力学に対する苦手意識を克服していただければ幸いです。

はじめに・本書の特徴	3
------------	---

1章 力の性質

1.1 力の表記方法	8
1 力の大きさと単位	8
2 力の図示	9
3 力の3要素	10
4 力の作用線と作用点	11
1.2 力の合成と分解	12
1 図式解法と算式解法	12
2 力の合成	12
3 力の分解	20
4 算式解法による力の合成	23
5 1点で交わらない力の合成	24
1.3 力のモーメント	29
1 力のモーメントとは	29
2 力のモーメントの正負	31
3 偶力	33
4 バリニオンの定理	35

2章 構造物の表現と種類

2.1 構造物と荷重のモデル化	40
1 モデル化	40
2 節点の種類	41
3 支点の種類	42
4 荷重の種類	44
5 分布荷重	44
2.2 安定と不安定	47
1 安定構造物と不安定構造物	47
2 静定構造物と不静定構造物	48

3章 力のつり合いを用いて静定梁を解く

3.1 反力	54
1 反力とは	54
2 力のつり合い	55
3 力のモーメントのつり合い	56
4 反力の求め方	57
5 力がつり合うための条件	63
3.2 応力	67
1 応力の種類	67
2 軸方向力	68
3 セン断力	71
4 セン断力の正負	72
5 曲げモーメント	73
6 曲げモーメントの正負	74
7 切断法による応力の求め方	75
3.3 応力図のかき方	77
3.4 曲げモーメントとせん断力の関係	100
3.5 応力のまとめ	102
1 正負の向き	102
2 応力の種類	103
3 荷重と応力の関係	103
3.6 重ね合わせの原理	114

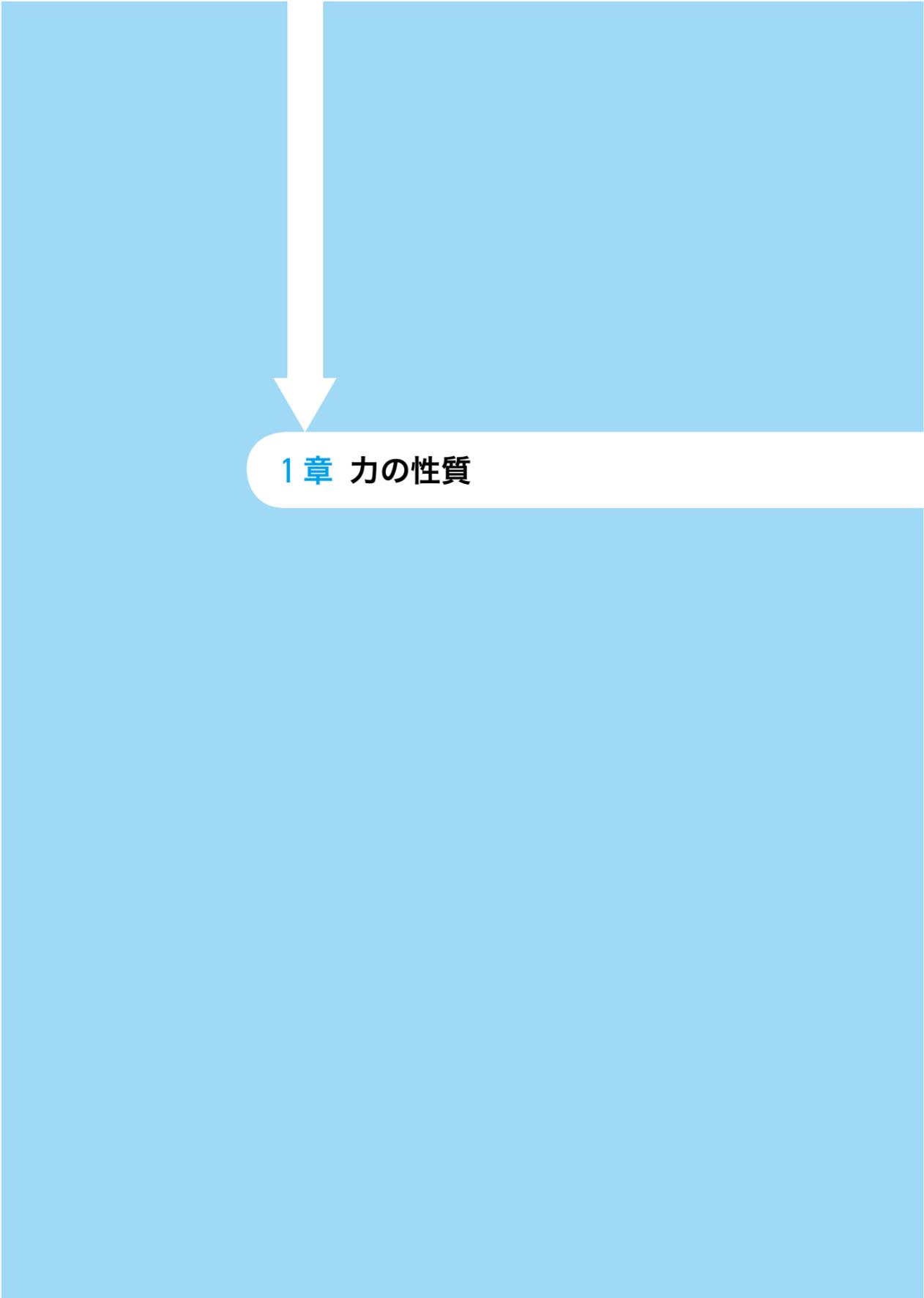
4章 静定ラーメンを解く

4.1 静定ラーメン	120
1 片持ち梁系ラーメン	120
2 単純梁系ラーメン	120
3 3ヒンジ系ラーメン	120
4 その他のラーメン	121

4.2 静定ラーメンの解法	122
1 片持ち梁系ラーメンの解法	122
2 単純梁系ラーメンの解法	125
3 3ヒンジ系ラーメンの解法	129

5章 静定トラスを解く

5.1 静定トラス	142
1 トラスとは	142
2 ラーメンとトラスのちがい	142
5.2 静定トラスの解法	143
1 反力の求め方	143
2 節点法	144
3 切断法	149
4 クレモナ解法	151
5.3 軸方向力が0になる部材の見つけ方	156
問題の解答	158



1章 力の性質

1.1 力の表記方法

1 力の大きさと単位

力は直接、目で見ることができませんが、物を「持つとき」や「押すとき」に力を感じ、その「大きさのちがい」も感じることができます。このとき、力に「向きがある」ことも感じることができるのではないのでしょうか。私たちは経験から力には大きさと向きがあることを知っています。ここでは、身近な素材で力の大きさについて考えてみましょう。

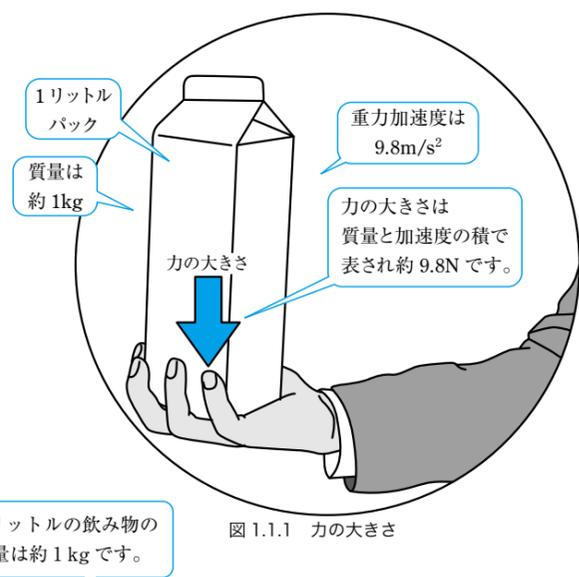


図 1.1.1 力の大きさ

図 1.1.1 のように 1 リットルの紙パックの飲み物を持つと、手のひらにはその重さにより下向きに力が作用します。この力の大きさ (F) は飲み物の質量と重力加速度 9.8 m/s^2 の積で与えられ、

$$F = 1 \text{ kg} \times 9.8 \text{ m/s}^2 = 9.8 \text{ kgm/s}^2 = 9.8 \text{ N}$$

となります。

ここで、質量と加速度の積の単位である kgm/s^2 は力の単位として **N** (ニュートン) で表します。また、1 N の 1000 倍を **1 kN** で表します。

MEMO

ニュートンの運動方程式
 $F(\text{力}) = m(\text{質量}) \times a(\text{加速度})$

例題 1

60 kg の人の重さを力の大きさと表すとどれくらいになるでしょう。

考え方

$$60 \text{ kg} \times 9.8 \text{ m/s}^2 = 588 \text{ kgm/s}^2 = 588 \text{ N}$$

60 kg の人の重さは約 590 N になります。

MEMO

数学と工学のちがい①

普段、数学では単位をいりませんが、工学では単位がとても重要で無視することができません。例外的に単位がなくなるものもありますが、それらも「単位がない」という特性を持ちます。したがって、すべての値に単位があると考えてください。値をかくときは、単位を忘れずにかくようにしましょう。

問題 1

あなたが床の上に立ったとき、床に対してどれくらいの大きさの力を下向きに作用させていることになりませんか。(解答は 158 ページ)

2 力の図示

体重計で測る重さも大きさを持つ力です。普段は、体重の大きさしか気にしませんが、重さは地球の中心に向かって作用しています。このように大きさと方向を持つ力は矢印を使って**図示**します。矢印は力の方向を示すのにとても便利な記号です。さらに、次の図 1.1.2 のように矢印の長さを変えることで大きさのちがいを表すことができます。力の矢印の長さを、力の大きさに比例してかくことを「**力の尺度**を用いてかく」といいます。

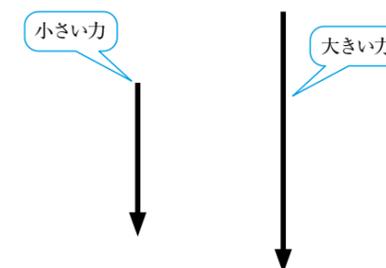


図 1.1.2 力の図示

MEMO

力の表記

力の表記には矢印を用います。矢印の向きで方向を、矢印の長さで大きさを表すことができます。

なお、この本では下図 1.1.3 (a) のように、矢印の▲印が付いていない側を**元端**、▲印が付いている側を**先端**と呼びます。また、右図 1.1.3 (b) のように矢印をつなげた図をかいた場合、最初の矢印の元端を**起点**、最後の矢印の先端を**終点**と呼ぶことにします。

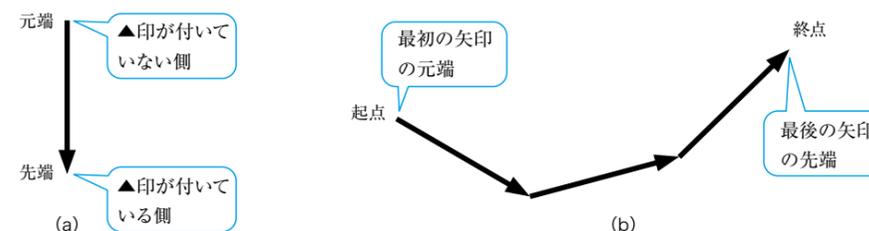
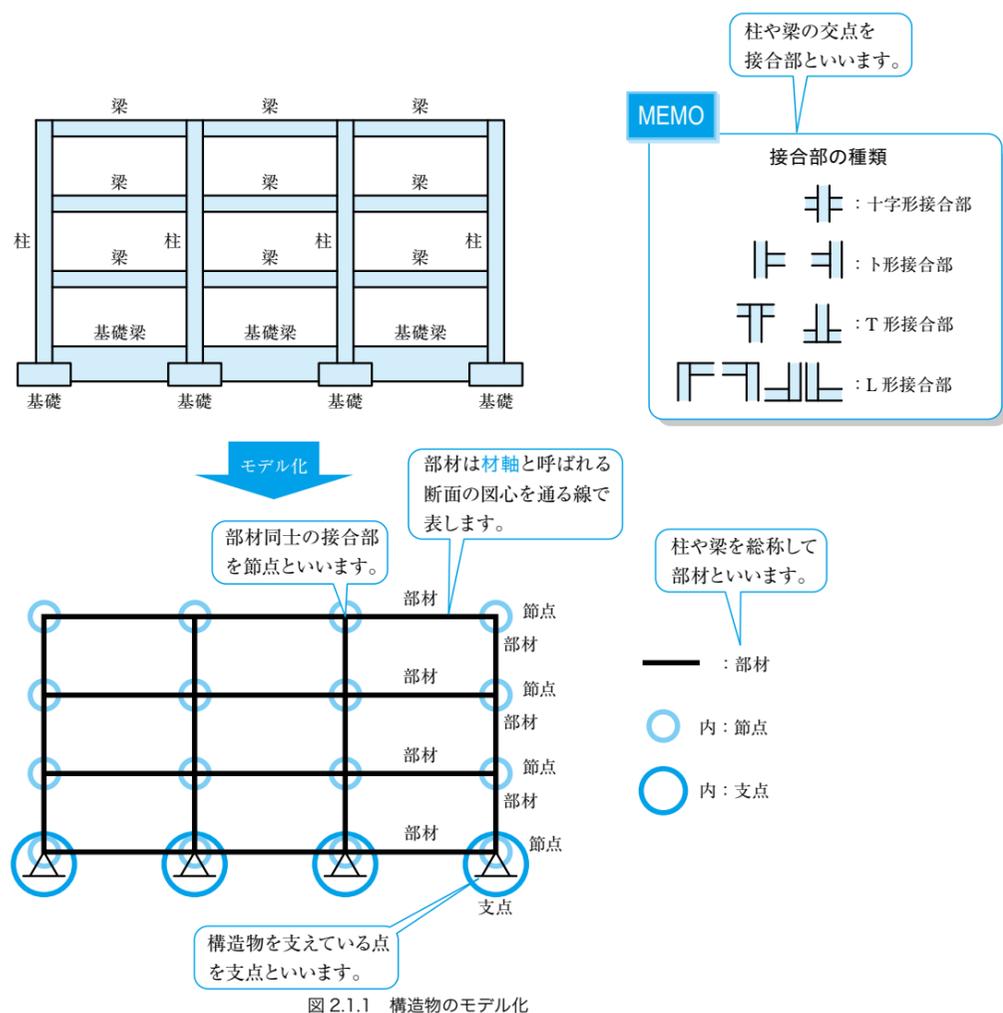


図 1.1.3 (本書における) 矢印表記のルール

2.1 構造物と荷重のモデル化

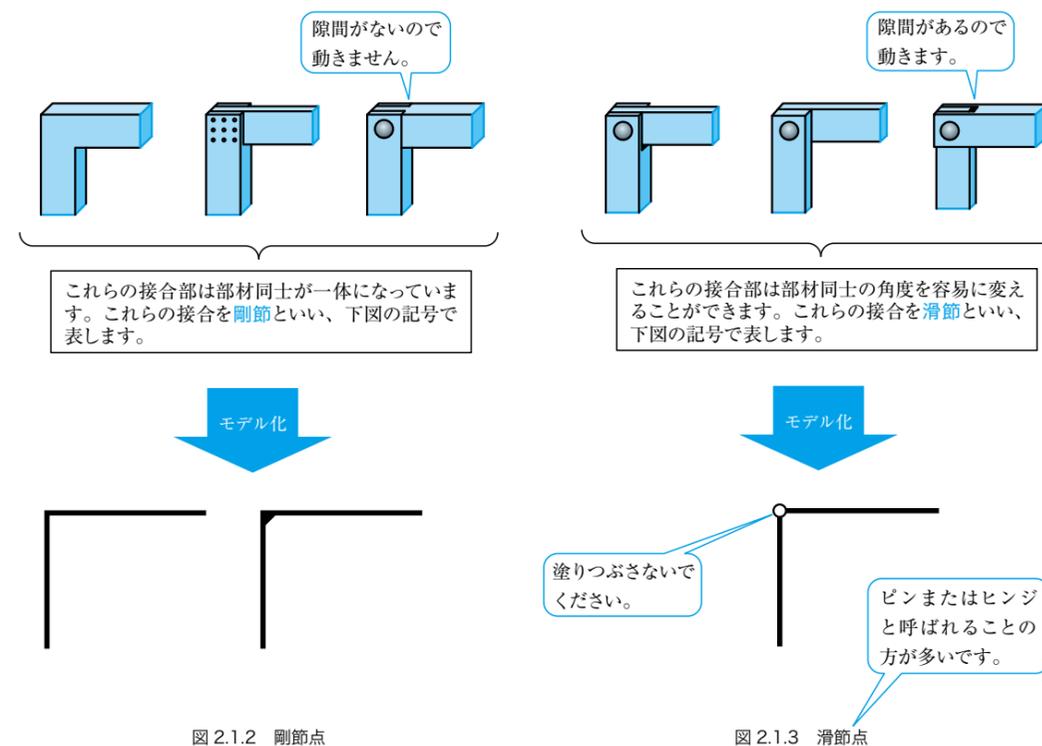
1 モデル化

建築物を構成する骨組みのうち、鉛直の骨組みを**柱**、水平の骨組みを**梁**といます。また、柱の下には建築物の重さを地盤に伝えるための**基礎**があり、柱の脚部をつなぐ梁のことを**基礎梁**といます。建築物の構造計算をする場合は、これらの骨組みを断面の**図心**（平面形の中心で、長方形なら対角線の交点、円形なら中心）を通る「線」で表し、基礎を記号で表します。この作業を建築物の**モデル化**といい、構造の仕組みを簡単でわかりやすく表現する方法です。下図2.1.1を見てください。建築物を構成する骨組みはすべて**部材**、部材同士の接合部は**節点**、建築物を支える基礎は**支点**という3つの要素で表しています。部材が組み合わさって外からの力に耐えるような物を**構造物**といます。



2 節点の種類

部材同士の接合部である節点には**剛節点**と**滑節点（ピン・ヒンジ）**の2種類があります（図2.1.2、2.1.3）。これらはそれぞれ**剛接合**および**ピン接合**とも呼ばれます。



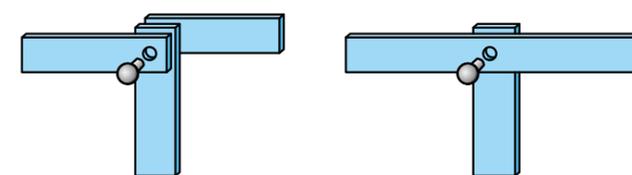
例題 1

図2.1.4に示したモデル化された図から、それがどんな接合を表しているかわかりますか。ちょっとしたちがいがいますが、この2つの接合は、同じではありません。



考え方

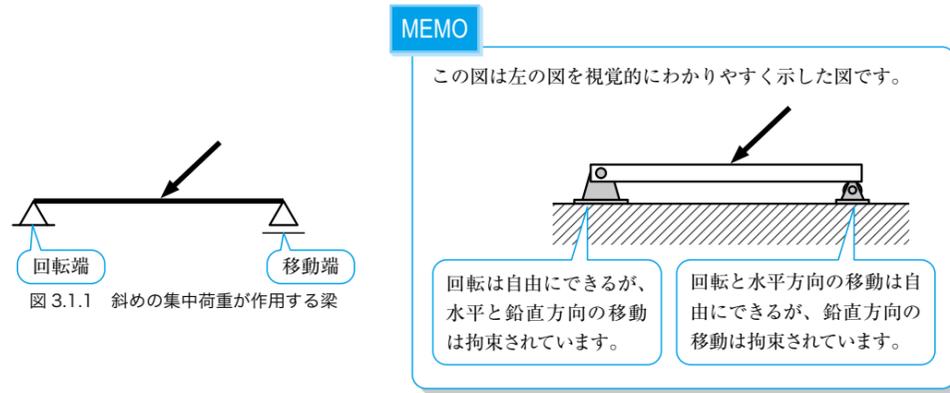
左の図は左右の部材が分かれています、右の図は左右の部材がつながっています。



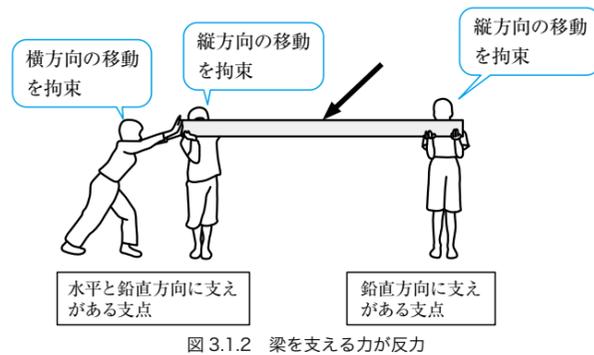
3.1 反力

1 反力とは

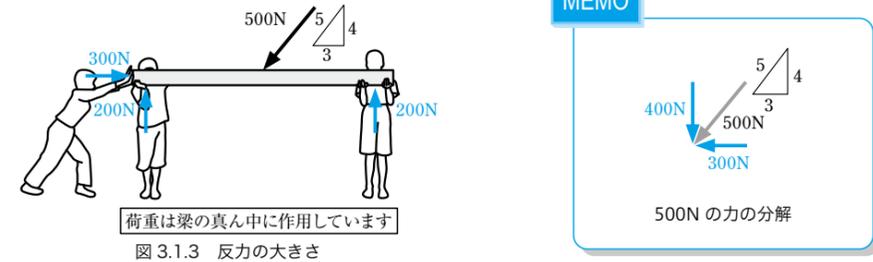
構造物に荷重が作用すると、支点には構造物を支えようとする力が発生します。この力を**反力**といいます。まずは図3.1.1のような梁を例に反力とはどのようなものか説明をします。図のように斜めの集中荷重が作用した状態を考えます。



この状態は図3.1.2のように3人の人物によって支えられた状態であると想像してみてください。このとき、梁を支えるために彼らが受ける力が反力です。そして、彼らがどれくらいの力を出せば梁を支えられるかを求めるのが、反力を求めるということです。



では実際に荷重の大きさを与えて反力を求めてみましょう。言い換えると「彼らはどんな力を出して梁を支えているのでしょうか」という問題になります。ただし、ここでは棒の重さはないものとします。答えは図3.1.3の青色の矢印のようになります。



次の図3.1.4は荷重の作用する位置や、支点の位置を移動した場合の例です。支える位置が変わると反力も変わります。

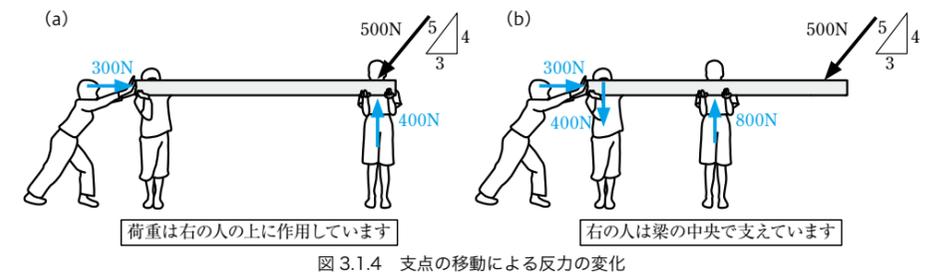
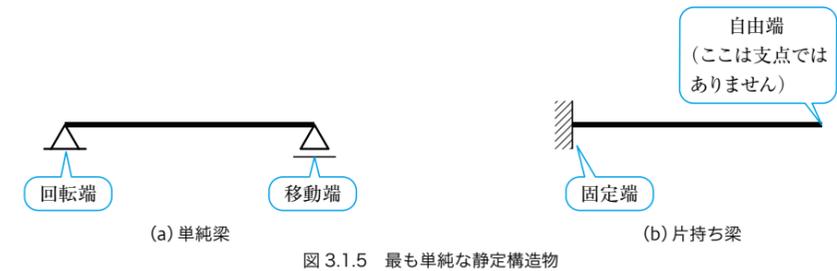


図3.1.3や図3.1.4に示したような例であれば反力は簡単にわかると思いますが、もっと複雑な問題になると反力の求め方を学ばないと答えを得ることは難しくなります。

2章の最後で安定構造物は静定構造物と不静定構造物に分けられることを学びましたが、静定構造物は後述の「力のつり合い」という条件を用いることで反力を求めることができ、不静定構造物はその条件だけでは反力を求めることができないという特徴があります。本書では、力のつり合い条件を用いれば反力を求めることができる静定構造物について、その解き方を学びます。図3.1.5に示す**単純梁**と**片持ち梁**が最も代表的で構造力学を習ううえで基本となる静定構造物です。



2 力のつり合い

図3.1.3を参考にして荷重と反力の関係がどうなっているか考えてみましょう。水平方向の力に注目してください。左の支点到300Nが右向きに、梁の中央には荷重500Nの水平成分である300Nが左向きに作用しています（図3.1.3横のMEMO参照）。右向きの力を正(+)、左向きの力を負(-)としてそれらの力の和を求めると0になります。

4.1 静定ラーメン

柱や梁などの部材同士を剛で接合した構造をラーメンと呼びます。ここでは、代表的な静定ラーメンである片持ち梁系ラーメン、単純梁系ラーメン、3ヒンジ系ラーメンの解法について学びます。

1 片持ち梁系ラーメン

下図4.1.1に片持ち梁系ラーメンの例を示します。1つの固定端（フィックス）で支持されたラーメンを片持ち梁系ラーメンと呼びます。

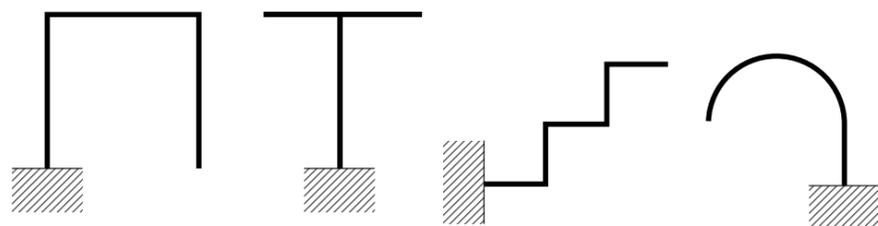


図 4.1.1 片持ち梁系ラーメンの例

2 単純梁系ラーメン

下図4.1.2に単純梁系ラーメンの例を示します。一方が回転端（ピン）で他方が移動端（ピンローラー）の2つの支点で支持されたラーメンを単純梁系ラーメンと呼びます。

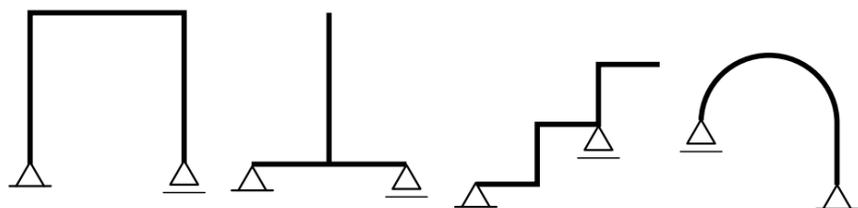


図 4.1.2 単純梁系ラーメンの例

3 3ヒンジ系ラーメン

下図4.1.3に3ヒンジ系ラーメンの例を示します。2つの回転端（ピン）で支持され、2つの支点の間にある部材の途中で滑節点（ヒンジ・ピン）が1つあるラーメンを3ヒンジ系ラーメンと呼びます。

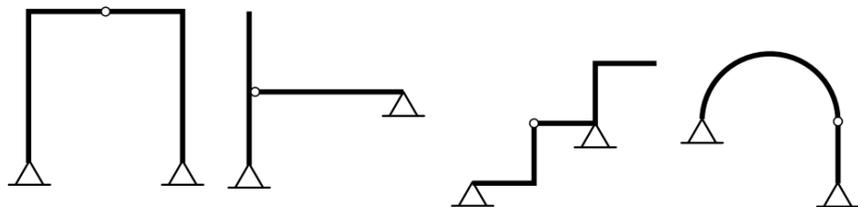


図 4.1.3 3ヒンジ系ラーメンの例

4 その他のラーメン

下図4.1.4は不静定ラーメンであり、本書で解説する知識だけではこれらの構造物を解くことはできません。

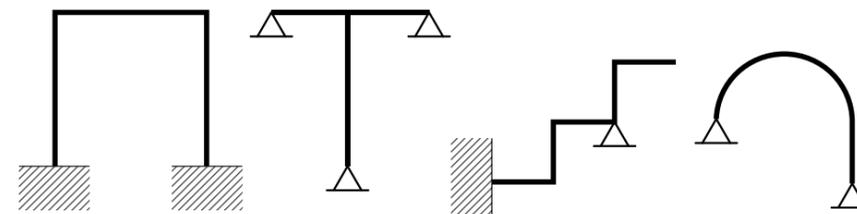


図 4.1.4 不静定ラーメンの例

MEMO

不静定構造物の解法

右図1の梁は不静定構造物です。左右の2つの支点が両方とも回転端（ピン）なので、それぞれの支点には水平と鉛直の反力があり、計4つの反力があります（図2）。力のつり合い式は $\Sigma X=0$ 、 $\Sigma Y=0$ 、 $\Sigma M=0$ の計3つですから、力のつり合いだけではそれを解くことができません。では、どうすれば不静定構造物が解けるのでしょうか。まずは、力のつり合い式を使ってどこまで解けるか確認してみましょう。

$$\begin{aligned} \Sigma X=0 : H_A - 45 \text{ kN} + H_B &= 0 & \dots \text{①} \\ \Sigma Y=0 : V_A - 60 \text{ kN} + V_B &= 0 & \dots \text{②} \\ \Sigma M_{\odot} = 0 : 60 \text{ kN} \times 4 \text{ m} - V_B \times 6 \text{ m} &= 0 & \dots \text{③} \end{aligned}$$

これらを解くと、式②、③から、

$$V_A = 20 \text{ kN}, V_B = 40 \text{ kN}$$

となります。鉛直方向の反力は求めることができました。しかし、式①は次のようになりますが、水平方向の反力である H_A と H_B は解くことができません。

$$H_A + H_B = 45 \text{ kN} \quad \dots \text{④}$$

これを解くためにはどうしたらよいのでしょうか。そのためには梁が「どのように変形するか」ということを考慮しなければなりません。

式④は図3のように、点Cに作用する45kNの荷重が H_A と H_B の和になることを表しています。したがって、その下の図4のように、45kNという荷重はAC材の点Cに H_A の圧縮力、CB材の点Cに H_B の引張力となって作用します。そして、AC材は H_A の圧縮力を受けて長さが縮みます。CB材は H_B という引張力を受けて長さが伸びます。また、両端の点Aと点Bは回転端という支点なので移動しません。そのため、長さの変化は点Cの移動量になります。ただし、AC材の点CもCB材の点Cも同一点なので、AC材の縮む量もCB材の伸びる量も同じでなくてはなりません。このことから、 H_A と H_B の大きさを求めることができます。

仮に H_A と H_B の大きさが同じであった場合、どのようなことが起きるか考えてみましょう。AC材の長さはCB材の2倍の長さがあるので、同じ大きさの力を受けた場合、AC材の長さの変化はCB材の長さの変化の2倍になります。これでは、左右の部材で点Cの移動量が違ってしまいます。点Cの移動量が同じになるためにはAC材に作用する力がCB材に作用する力の1/2でなければなりません。したがって $H_A : H_B = 1 : 2$ です。式④より、 $H_A + H_B = 45 \text{ kN}$ なので、

$$H_A = 15 \text{ kN}, H_B = 30 \text{ kN}$$

になります。

このように不静定構造物も変形を考慮することで解くことができます。

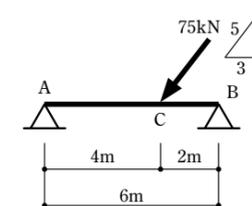


図 1 不静定構造物の問題

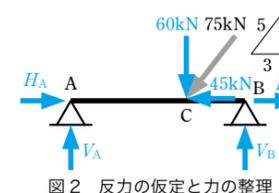


図 2 反力の仮定と力の整理

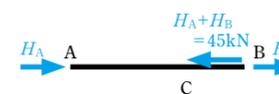


図 3 水平方向の力のつり合い

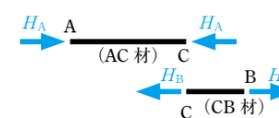


図 4 水平方向の力の流れ

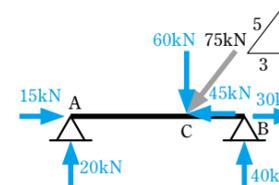


図 5 不静定構造物の反力

5.1 静定トラス

1 トラスとは

トラスとは骨組みを構成する部材が直線で、部材同士が滑節点（ピン、ヒンジ）で接合され、部材で囲われた領域が三角形になっている構造形式をいいます。図5.1.1にトラスの例を示します。

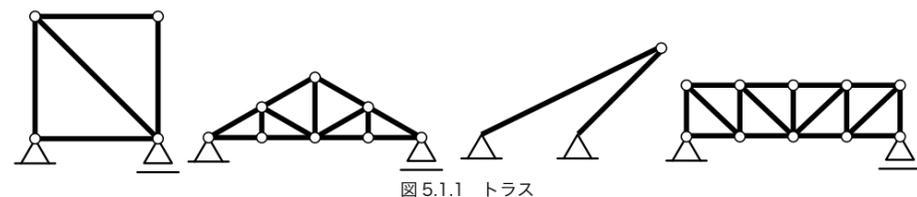


図5.1.1 トラス

2 ラーメンとトラスのちがい

図5.1.2に示すようにラーメンでは力が作用したとき、力の作用した点の変位（移動量）はラーメンを構成する部材が曲がることで生じます。これに対してトラスでは部材が曲がるのではなく、トラスを構成する部材の長さが変化することで変位が生じます。そのため、トラスには長さを変える力である軸方向力が部材に生じますが、曲げモーメントやせん断力は生じません。ただし、曲げモーメントやせん断力が生じないというのはトラスの節点にだけ荷重が作用した場合で、部材の途中に荷重が作用した場合はその部材に曲げモーメントやせん断力が生じます。

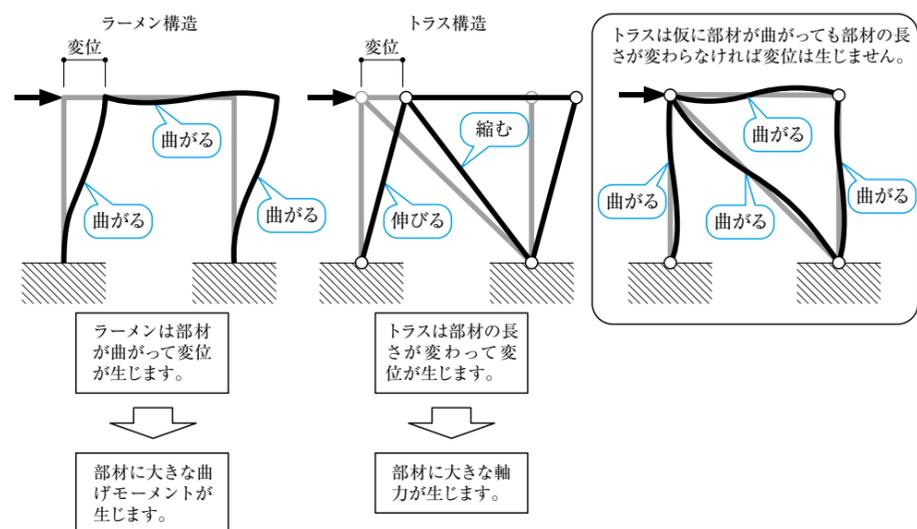


図5.1.2 ラーメンとトラスのちがい

5.2 静定トラスの解法

1 反力の求め方

トラスの解法とは、トラスを構成する部材に生じている軸方向力を求めることです。その代表的な解法には節点法、切断法、クレモナ解法がありますが、それらの解法を解説する前に、例題1でトラスの反力を求めてみましょう。

例題 1

図5.2.1に示すトラスの反力を求めましょう。

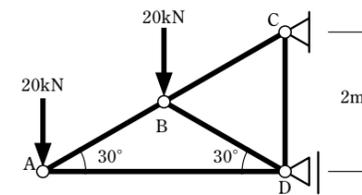


図5.2.1

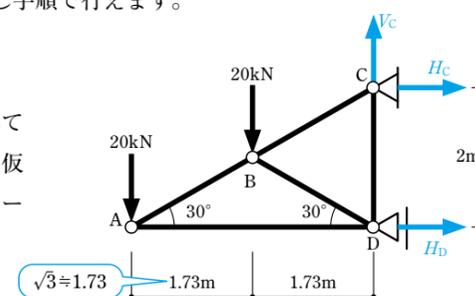
考え方

反力の求め方は構造によらず、すべて同じ手順で行えます。

STEP 1

- 反力を仮定する

支点Cは回転端（ピン）で支持されているため鉛直方向と水平方向の反力を仮定します。支点Dは鉛直方向にローラーなので水平方向の反力を仮定します。



STEP 2

- 力を整理する

斜めの荷重も分布荷重もないため、STEP 2は省略します。

STEP 3

- 力のつり合い式をつくる

$$\Sigma X = 0 : \vec{H}_C + \vec{H}_D = 0$$

$$\Sigma Y = 0 : -20 \text{ kN} - 20 \text{ kN} + V_C = 0$$

$$\Sigma M_C = 0 : -(20 \text{ kN} \times (1.73 \text{ m} + 1.73 \text{ m})) - (20 \text{ kN} \times 1.73 \text{ m}) - (H_D \times 2 \text{ m}) = 0$$

STEP 4

- 解を求める

STEP 3で求めた3つの連立方程式を解きます。