ゼロからはじめる［構造力学］演習

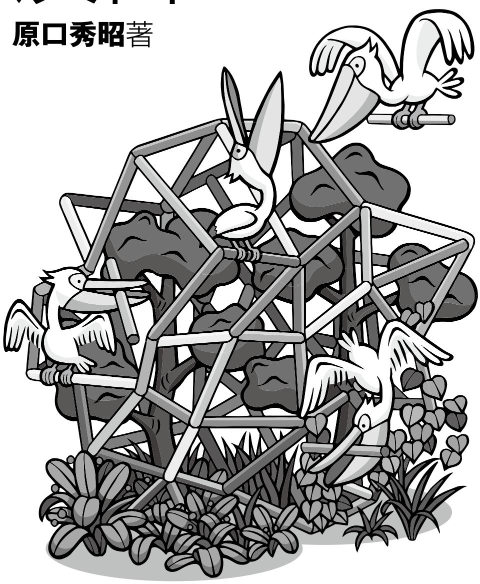
原口秀昭著

彰国社

ゼロからはじめる

[構造力学]演習

原口秀昭著



彰国社

はじめに

馬鹿のひとつ覚えのように繰り返せば、誰でも大抵のことはできるようになる！
構造力学が苦手というデザイン系の学生は多いですが、1回読んで分からなくても、2回、3回と解きながら読めば必ずわかってきますし、覚えてきます。「数げいこ」とは基本動作を数多く行って体に覚えさせるけいこで、武道でよく行われています。学問は頭を使うので、体で覚えるスポーツとは違うと言う人もいますが､私が思うにまったく一緒です。

本書は構造力学の基本演習書ですが建築士の過去問題をベースとしています。建築の学生なら2級建築士や1級建築士はそのうち受けるだろうし、過去問なら将来の受験時に役立つだろうというモチベーションにもつながります。難易度は、「やさしい」が2級建築士程度、「普通」「難しい」は1級建築士程度の問題です。実際に出題された過去問をアレンジしていますが、適宜、基本問題も追加しています。

たわみとたわみ角、不静定ラーメンの曲げモーメント、座屈、全塑性モーメント、崩壊荷重などの学生から難しいとよく言われるところには、頁を多く割いて、イラストを多く使って説明しています。公式は適宜、繰り返し表示しています。巻末に構造力学の重要な公式を集め、暗記しやすいようにレイアウトしてあります。

1級を受ける人も、やさしい→普通と順々に解いてください。そして必ず紙の上で鉛筆と消しゴムを使って解いてください。数式は読んで難しいと感じても、紙の上でゆっくりと自分で書くと、案外簡単に理解できるものです。面倒がらずに紙の上に書くことをおすすめします。

演習問題の解法の説明では、理屈の部分をなるべく絵にするように努力しました。多くのイラストで構造力学を感覚的に理解できるようにしています。POINTの囲みで問題の解き方の要点を、スーパー記憶術で公式の暗記の仕方を随時書いておきました。退屈を和らげるように、ゼロからはじめるシリーズ共通の漫画を付けました。高ピーなツッコミ役の肉食系女子ミキと､自信なげなボケ役の草食系男子アキラのふたりです。ふざけていると御批判もたまに受けますが、漫画的なデフォルメとしてお許しください。

そもそもゼロからはじめるシリーズは、筆者が教えている学生たちに漫画付きの解説をブログ（http://plaza.rakuten.co.jp/haraguti/）に毎日アップしたのが始まりです。漫画でも付けないと、学生たちは読んでくれません。ブログ読者から、あの記事は間違いではないかとか、そうで

装丁＝早瀬芳文
装画＝内山良治
本文フォーマットデザイン＝鈴木陽子

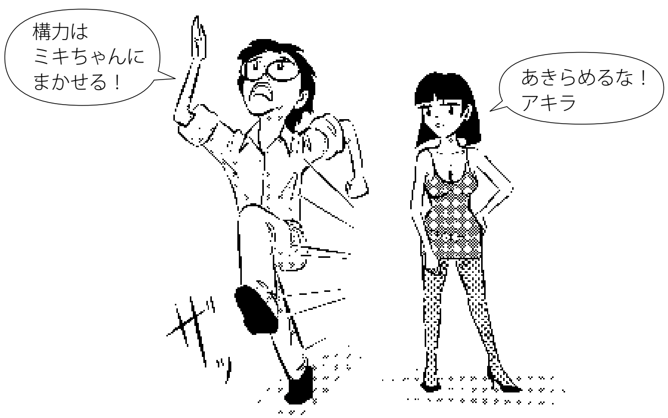
はなくてこうではないかとのご指摘も何度かいただきました。またイラストがよく描けているとの励ましも何度もいただきました。そんなブログ記事を集めて加筆修正して本にすることを繰り返していたら、本書でシリーズ 10 冊目となりました。

多くの拙著が中国、台湾、韓国で翻訳されています。イラスト、漫画を全頁に付けているのがアジア圏で受けているのかもしれません。ただイラスト、漫画を大量に起こす作業は大変で、根気のいる作業です。読者の方や学生たち、ブログ読者や編集さんからのプレッシャーがなければ、とっくの昔にやめていたと思います。

構造力学の基本について、各頁で繰り返し解説していますが、ベクトル、モーメント、応力、応力度がまるでわからないという方は、拙著『マンガでわかる構造力学』を併読することを強くおすすめします。また構造一般のことはゼロからわかるシリーズ既刊『建築の［構造］入門』を、構造力学の公式の導入や微積分、微分方程式の意味など、一歩進んだ内容については『構造力学スーパー解法術』を、各構造や構法については『［木造建築］入門』『［RC 造建築］入門』『［S 造建築］入門』をぜひご参照ください。次回予定の「［RC 造＋ S 造］構造演習」もお楽しみに。

本書を書くにあたって、ご助言をいただいた多くの専門家の方々、ブログ読者の方々、参考にさせていただいた専門書の著者の方々、また素朴な質問を数多くぶつけてくれた学生たち、面倒な編集作業をしてくれた彰国社編集部の尾関恵氏、企画の段階からご助力いただいた中神和彦氏に、この場を借りてお礼申し上げます。本当にありがとうございました。

2014 年 7 月　　原口秀昭



も　く　じ　　CONTENTS

はじめに…3
演習をはじめる前に（力と符号）…8

1　モーメント
偶力…10　分布荷重…12　モーメントのつり合い…14　x、y、M のつり合い…16

2　支点反力
単純梁の反力…20　片持ち梁の反力…26　片持ち柱の反力…28　門形静定ラーメンの反力…30　3ヒンジラーメンの反力…32

3　トラス
節点法…36　切断法…40

4　単純梁の応力
中央に集中荷重のかかる単純梁の M 図…48　等分布荷重のかかる単純梁の M 図…50　集中荷重、等分布荷重のかかる単純梁の M 図の比較…52　非対称荷重のかかる単純梁の M 図…54　中央に集中荷重のかかる単純梁の Q 図…56　集中荷重のかかる単純梁の M 図と Q 図…58　モーメント荷重のかかる単純梁の M 図と Q 図…60　等分布荷重のかかる単純梁の M 図と Q 図…62　等分布荷重と集中荷重が同時にかかる単純梁の M 図…64　はね出しのある単純梁の M 図…66

5　片持ち梁の応力
集中荷重のかかる片持ち梁の M 図と Q 図…68　等分布荷重のかかる片持ち梁の M 図と Q 図…70　等変分布荷重のかかる片持ち柱の M 図と Q 図…72　不整形片持ち柱の M 図…74

6　静定ラーメンの応力
門形静定ラーメンの Q 図…76　山形静定ラーメンの M 図…80　不整形片持ち柱の M 図…82　門形静定ラーメンの M 図…86

7　不静定ラーメンの応力
門形不静定ラーメンの M 図…92　上部３角形がトラスの不静定ラーメンの M 図…96　２スパン中央沈下ラーメンの M 図…98　２層不静定ラーメンの M 図…100　T 形不静定ラーメンの M 図…114

8　力と変形
$\sigma=E\varepsilon$…116

9　断面
断面１次モーメントと図心…122　断面２次モーメント I…124

10　応力度
中央集中荷重の曲げ応力度 σ_b…130　中央集中荷重のせん断応力度 τ…132　曲げ応力度≦許容曲げ応力度…134　断面係数 Z…138　柱の垂直応力度…142　柱のせん断応力度…150　集中荷重のかかる単純梁の曲げ応力度…152

11　たわみとたわみ角
等分布荷重のかかる単純梁のたわみ δ とたわみ角 θ…154　等分布荷重のかかる２つの梁のたわみ δ その１…156　集中荷重のかかる２つの梁のたわみ δ…158　モーメント荷重のかかる片持ち梁のたわみ δ…164　モーメント荷重のかかる片持ち梁のたわみ角 θ…166　等分布荷重のかかる２つの梁のたわみ δ その２…170

12　たわみとたわみ角で解く不静定構造物
単純梁のたわみ δ で連続梁を解く…172　片持ち梁のたわみ δ で一端固定他端移動の梁を解く…174　片持ち梁のたわみ δ で両端固定＋中間ヒンジ梁を解く…176

13　変位で解く柱の外力
柱の外力 P とたわみ δ の関係式…178　水平荷重がかかる２本柱の柱脚の曲げ応力度…188　ラーメンの変位 δ と水平剛性 K…190

14　固有周期
集中質量柱の固有周期 T…196　門形ラーメンの固有周期 T…200　加速度応答スペクトル…204

15　座屈
座屈荷重 P_k の式…208　座屈荷重 P_k の比較…210

16　全塑性モーメント
長方形断面の全塑性モーメント…226　H 形断面の全塑性モーメント…228　T 形断面の中立軸…236　塑性断面係数 Z_p…240　水平荷重のかかる柱底面の全塑性モーメント…242　全塑性時の N と M…244　水平・垂直荷重のかかる柱底面の全塑性モーメント…248　RC 梁の終局曲げモーメント…252

17　崩壊荷重
崩壊メカニズム…256　梁の崩壊荷重 P_u…258　門形ラーメンの崩壊荷重 P_u…268　２スパンラーメンの崩壊荷重 P_u…278　２層ラーメンの崩壊荷重 P_u…282

18　判別式
判別式…286

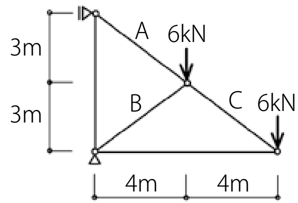
19　たわみ角法
剛度 K と剛比 k…290　剛比 k によるモーメントの分割…292　十字形不静定ラーメンの有効剛比 k_e…296　L 形不静定ラーメンをたわみ角法で解く…302　門形不静定ラーメンをたわみ角法で解く…308

20　固定モーメント法
L 形不静定ラーメンを固定モーメント法で解く…316　門形不静定ラーメンを固定モーメント法で解く…322

21　公式集
公式集…324

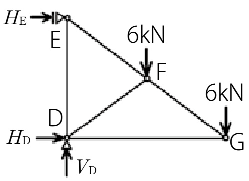
難しい

Q 図のような荷重を受ける静定トラスにおいて、部材A、B、Cに生じる軸方向力N_A、N_B、N_Cを求めよ。



A 節点の数が少ないので、各節点のつり合いで解きます。

①全体のつり合いから、支点反力を求めます。



$\Sigma x=0$：$H_D+H_E=0$（→⊕）……（1）

$\Sigma y=0$：$V_D-6-6=0$（↑⊕）

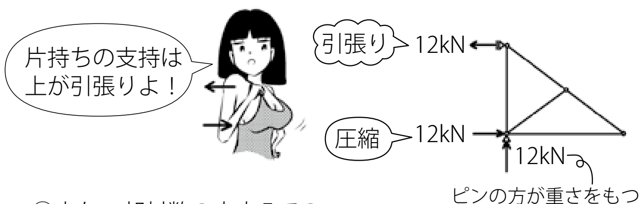
　　∴$V_D=12$kN（↑）

点Dにおける

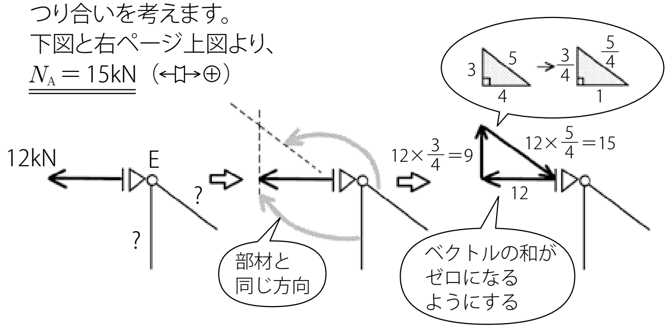
$\Sigma M=0$：$H_E\times6+6\times4+6\times8=0$（↻⊕）

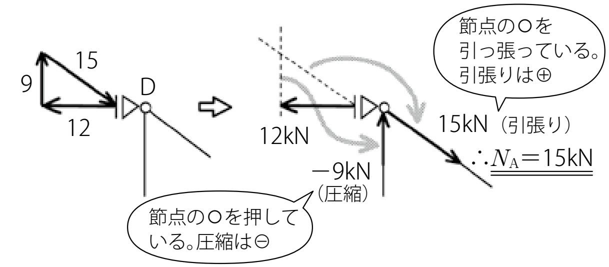
　　∴$H_E=-12$kN（←）……（2）

（2）を（1）に代入して、$H_D=12$kN（→）

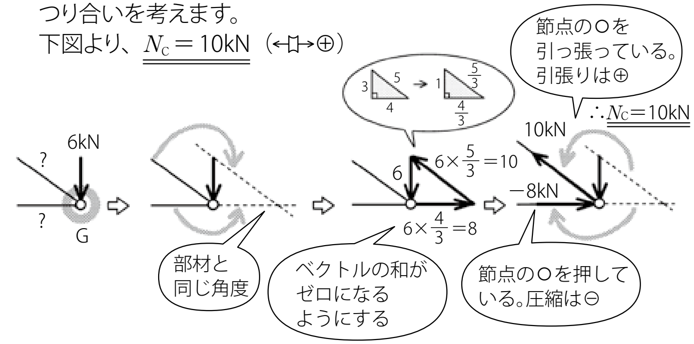


②少ない部材数の支点Eでのつり合いを考えます。
下図と右ページ上図より、
$N_A=15$kN（←□→⊕）

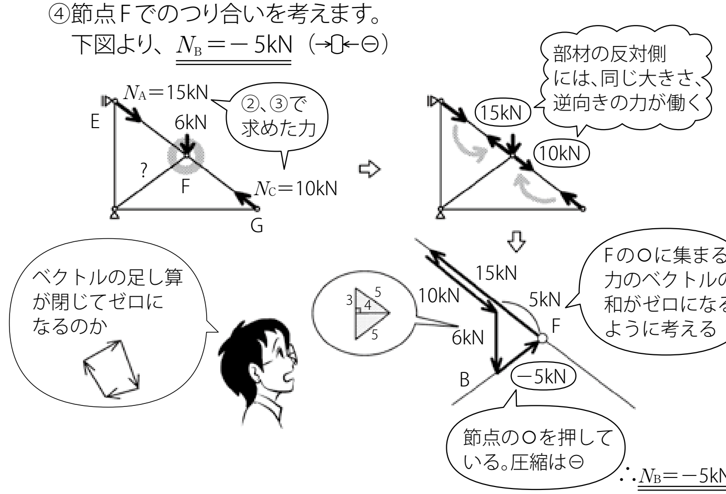




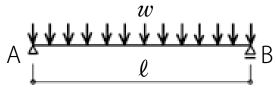
③部材数の少ない、右下の節点Gでのつり合いを考えます。
下図より、$N_C=10$kN（←□→⊕）



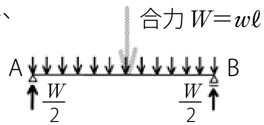
④節点Fでのつり合いを考えます。
下図より、$N_B=-5$kN（→□←⊖）



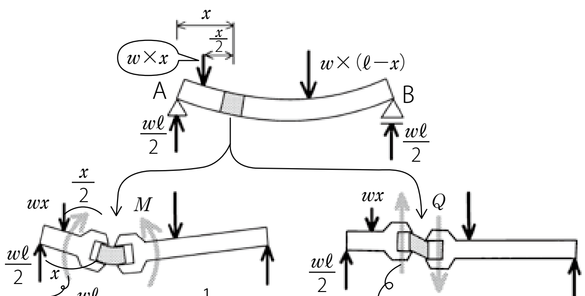
Q 図のような等分布荷重 w を受ける単純梁の、M図とQ図を描け。



A ①支点反力は、集中荷重のときと同様に、対称だから半分ずつ。



②点Aから距離 x の所をサイコロ状に切り出して、M、Q を求めます。

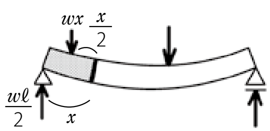


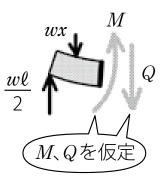
$M=\frac{w\ell}{2}\times x-wx\times\frac{1}{2}x$

$=-\frac{w}{2}x^2+\frac{w\ell}{2}x$ (⤹⤸⊕)

$Q=-wx+\frac{w\ell}{2}$ (↑□↓⊕)

③別の方法として、切断した左側のつり合いを考えて、M、Q を求めます。





$\Sigma y=0:\frac{w\ell}{2}-wx-Q=0$ (↑⊕)

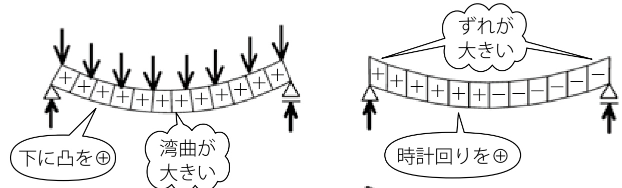
$\therefore Q=-wx+\frac{w\ell}{2}$ (↑□↓⊕)

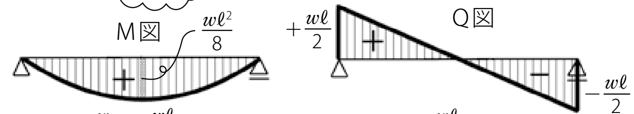
切断面における

$\Sigma M=0:\frac{w\ell}{2}\times x-wx\times\frac{x}{2}-M=0$ (↻⊕)

$\therefore M=-\frac{w}{2}x^2+\frac{w\ell}{2}x$ (⤹⤸⊕)

④ M は凸側に、Q は↑□↓を上側にしてグラフを描きます。

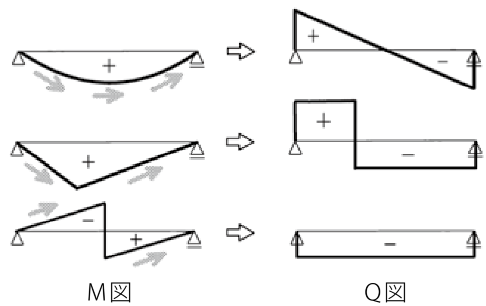




$M=-\frac{w}{2}x^2+\frac{w\ell}{2}x$ (⤹⤸⊕)　　$Q=-wx+\frac{w\ell}{2}$ (↑□↓⊕)

⑤ $Q=M$ の傾き（微分）を知っていると、M の式を微分するだけで Q を求めることができます。

$$Q=\frac{dM}{dx}=\left(-\frac{w}{2}x^2+\frac{w\ell}{2}x\right)'=-\frac{w}{2}\cdot 2x+\frac{w\ell}{2}\cdot 1=-wx+\frac{w\ell}{2}\ (↑□↓⊕)$$



Q をさらに微分すると $-w$ が出ます。

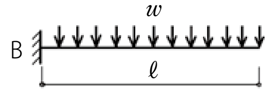
スーパー記憶術

無休で荷を下ろす
$M\to Q\to w$　マイナス

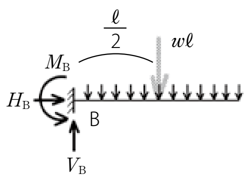
$\frac{dM}{dx}=Q$（M の傾き $=Q$）

$\frac{dQ}{dx}=-w$（Q の傾き $=-w$）

Q 図のような等分布荷重 w を受ける片持ち梁の、M図とQ図を描け。

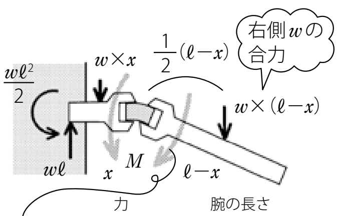


A ①反力を仮定して、つり合いの式を立てます。

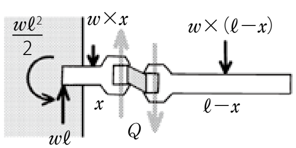


$\Sigma x=0$：$\underline{H_B=0}$（→⊕）
$\Sigma y=0$：$V_B-w\ell=0$（↑⊕）
$\therefore \underline{V_B=w\ell}$（↑）
支点Bにおける
$\Sigma M=0$：$-M_B+w\ell\times\dfrac{\ell}{2}=0$（↻⊕）
$\therefore \underline{M_B=\dfrac{w\ell^2}{2}}$（↺の大きさ）

②支点Bから距離xの所をサイコロ状に切り出して、M、Qを求めます。

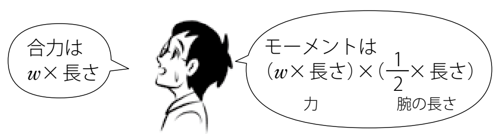


力　腕の長さ
$M=\left\{w\times(\ell-x)\right\}\times\left\{\dfrac{1}{2}(\ell-x)\right\}$
$=\dfrac{w}{2}(\ell-x)^2$（(口)の大きさ）
(口)⊖なので、$M=-\dfrac{w}{2}(x-\ell)^2$

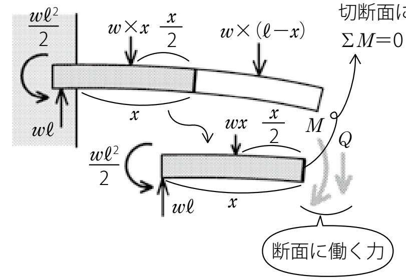


$Q=w(\ell-x)=\underline{-wx+w\ell}$
↑口↓⊕なのでそのまま

$$\left(\begin{aligned}Q&=\frac{dM}{dx}=\left(-\frac{w}{2}(x-\ell)^2\right)'\\&=2\times\left(-\frac{w}{2}\right)(x-\ell)\\&=-w(x-\ell)=-wx+w\ell\ \text{で}Q\text{と一致する}\end{aligned}\right)$$



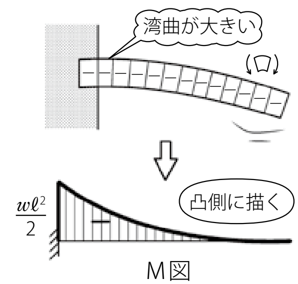
③別の方法として、切断して片側のつり合いを考えます。

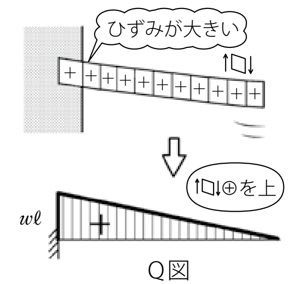


切断面における
$\Sigma M=0$：$(w\ell)\times x-\dfrac{w\ell^2}{2}-(wx)\times\dfrac{x}{2}+M=0$（↻⊕）
$\therefore M=\dfrac{w}{2}x^2-w\ell x+\dfrac{w\ell^2}{2}$
$=\dfrac{w}{2}(x^2-2\ell x)+\dfrac{w\ell^2}{2}$
$=\dfrac{w}{2}\left\{(x-\ell)^2-\ell^2\right\}+\dfrac{w\ell^2}{2}$
$=\dfrac{w}{2}(x-\ell)^2$（(口)の大きさ）
平方完成
(口)⊖なので$M=-\dfrac{w}{2}(x-\ell)^2$

左側の
$\Sigma y=0$：$w\ell-wx-Q=0$（↑⊕）
$\therefore \underline{Q=-wx+w\ell}$
↑口↓⊕なのでそのまま

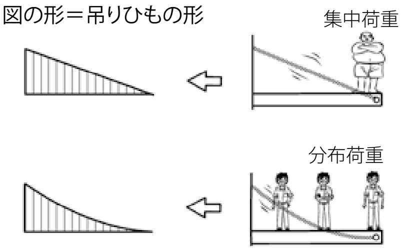
④グラフを描きます。



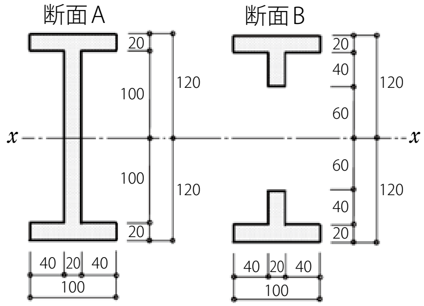


スーパー記憶術

M図の形＝吊りひもの形

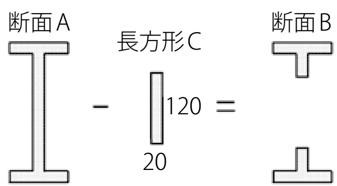


Q 図のような断面Aおよび断面Bにおいて、x軸に関する断面2次モーメントI_AとI_Bの値の差を求めよ。



（単位はmm）

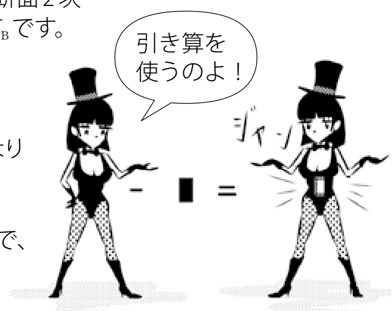
A ①断面Aから中央の長方形Cを除くと、断面Bになります。



②断面A、B、長方形Cの中立軸は同じです。I_Aから長方形Cの断面2次モーメントI_Cを引いた値がI_Bです。

$$I_A-I_C=I_B$$
$$\therefore I_A-I_B=I_C$$

よって、I_AとI_Bの差はI_Cとなります。



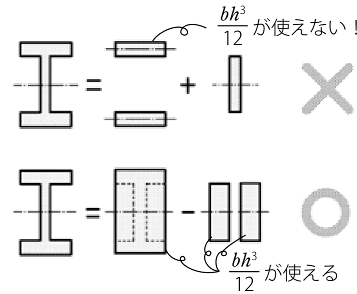
③I_Cは中心に中立軸があるので、$\frac{bh^3}{12}$の公式が使えます。

$$I_C=\frac{20\times(120)^3}{12}=\frac{20\times\overset{10}{\cancel{120}}\times120\times120}{\cancel{12}}$$
$$=2880000$$
$$=\underline{288\times10^4\text{mm}^4}$$

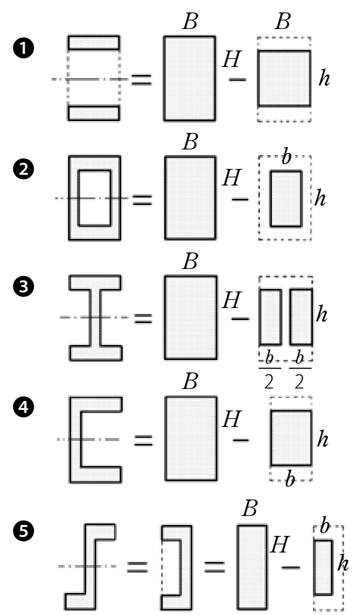
$\frac{bh^3}{12}$は<u>高さhの中心に軸があるときにしか使えません</u>。軸から図心がy離れた面積Aの長方形では、

$$I=\frac{bh^3}{12}+Ay^2$$

となって、計算が面倒になります。



❶〜❺は$\frac{bh^3}{12}$の式の引き算のみで計算できる形の例です。



❶ $I=\frac{BH^3}{12}-\frac{Bh^3}{12}$

❷ $I=\frac{BH^3}{12}-\frac{bh^3}{12}$

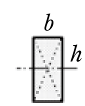
❸ $I=\frac{BH^3}{12}-\left(\frac{\left(\frac{b}{2}\right)h^3}{12}+\frac{\left(\frac{b}{2}\right)h^3}{12}\right)$
$=\frac{BH^3}{12}-\frac{bh^3}{12}$

❹ $I=\frac{BH^3}{12}-\frac{bh^3}{12}$

❺ $I=\frac{BH^3}{12}-\frac{bh^3}{12}$

Point

$I=\frac{bh^3}{12}$ は軸が中心にある場合だけ！



9 断面

Q 中心圧縮力が作用する図１のような正方形断面の長柱の弾性座屈荷重 P_A、P_B、P_C、P_D の大小関係を求めよ。ただし、柱は全長にわたって等質・等断面とし、柱の長さおよび材端条件は図２のＡからＤとする。

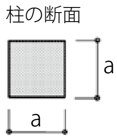


図１

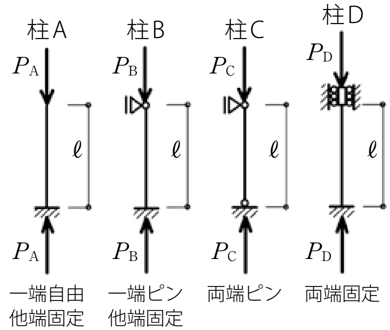
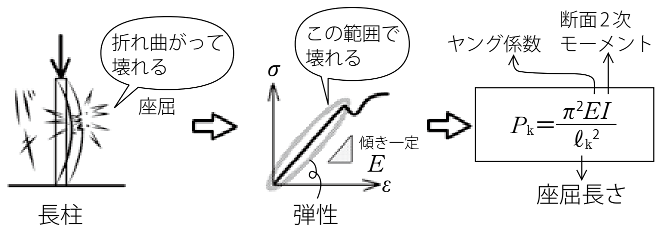


図２

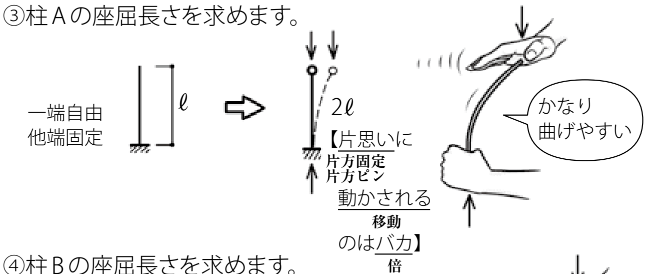
A ①長柱（ちょうちゅう）とは座屈で壊れる柱のことで、圧縮で壊れる短柱と区別されます。そして力と変形が比例関係にあって、力を除くと変形がなくなる弾性状態で座屈する場合、$P_k=\dfrac{\pi^2 EI}{\ell_k^2}$ の式が成り立ちます。



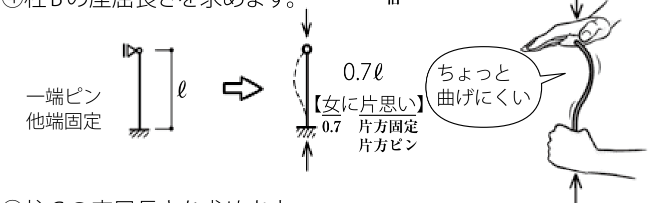
柱の中心にかかる中心圧縮力の場合のみ、P_k の式は成り立ちます。偏心した圧縮力のときは、「圧縮力×偏心距離」分のモーメントが発生します。

②設問の場合、柱はすべて１辺が a の正方形断面で、断面２次モーメント $I=\dfrac{a\times a^3}{12}=\dfrac{a^4}{12}$ と同じ値となります。また等質であることからヤング係数 E も同じです。よって座屈長さ ℓ_k の大小関係を求めれば、P_k の大小関係がわかることになります。

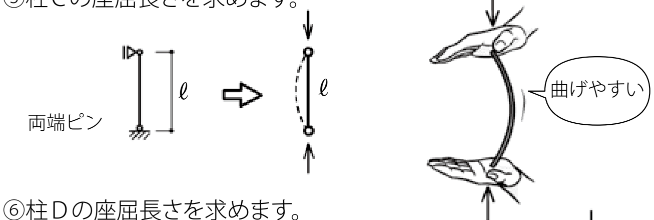
③柱Ａの座屈長さを求めます。



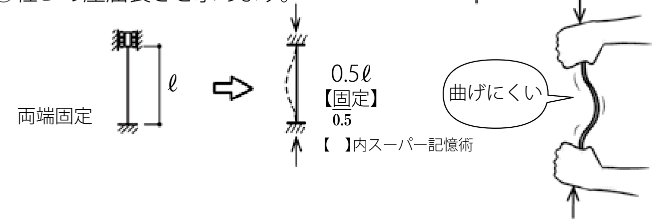
④柱Ｂの座屈長さを求めます。



⑤柱Ｃの座屈長さを求めます。



⑥柱Ｄの座屈長さを求めます。



⑦柱Ａ、Ｂ、Ｃ、Ｄの ℓ_k を比較して、P_k の大小関係を求めます。

$\ell_A>\ell_C>\ell_B>\ell_D$

P_k は ℓ_k^2 に反比例（分母に ℓ_k^2）するので、

$\therefore P_D>P_B>P_C>P_A$

15 座屈