くわしすぎる 構造力学演習

III

不静定構造編

岡田 章 ＋ 宮里直也

彰国社

くわしすぎる
構造力学演習

III

不静定構造編

岡田 章 ＋ 宮里直也

彰国社

はじめに

美しくて安全な建築物の構造を考えることは、時間を忘れるほど楽しい、創造的な活動です。この構造デザインに携わるためには、構造力学の基礎知識とそれを通じて得られる感覚が必須となります。

ところが、構造力学に苦手意識を持つ人が少なくありません。構造力学の修得には、高校の物理や数学の知識は、ほとんど不要であるにもかかわらず、不思議なことです。大学で構造力学を教えていると、学生が構造力学から離れていく瞬間を感じることがあります。学生のつまずきの時期や理由は様々ですが、共通しているのは、理屈は理解していても、いざ演習問題に向かうと解けなくなる、あるいは意欲的に解こうとしない、ということが挙げられます。

これが本シリーズを書くに至った理由です。本文は、構造力学の理論的な解説をできるだけ省略し、問題を解くことを通じて、構造力学の楽しさを味わいながら自然と理論が身に付くことを目的としています。そのため、問題を解く手順を最初に提示し、この定められた手順に従って＜基本問題＞を解く、といった構成となっています。基本問題は一級建築士レベルのものを選んであります。ぜひ、一級建築士レベルの問題がいかに簡単に解けるか、を味わってください。

具体的にいうと、章の冒頭で解法の手順をまとめたものが＜Method＞、手順の肝（きも）を述べたのが＜Point＞です。そのあとに続く＜check＞（例題）は Point の理解度を確認するために設けてあります。

＜Information＞は Point で紹介したことを有効に使うための背景や、基本問題を解くための公式など、知っておいてほしい内容をまとめたもので、必読事項です。＜Memo＞は、重要項目を改めて短くまとめたものです。この他、基本問題には＜Navi＞も設け、着眼点をまとめてあります。

＜Supplement＞には、理論的な背景や理解を深めるための補足をまとめてあります。余裕があれば読むことをお薦めします。各章末の＜challenges＞は一級建築士レベルを超えた問題で、応用問題と捉えていただいて結構です。

本シリーズを通じて構造力学のおもしろさに気づく人が少しでも増えることが著者たちの望みです。明日を担う構造エンジニアの誕生の一助になれば幸いです。

［目次］

［デザイン］ 榮元正博

1章

不静定次数を求める

Level Up!

1章

不静定次数を求める

釣合条件の数と未知数の数から静定構造、不静定構造、不安定構造を判別する方法を学ぶ。「未知数とは何か」「釣合条件は何か」を理解してほしい。不静定次数は、(未知数の数)−(釣合条件の数)で表される。

「不静定(ふせいてい)」とは……

·「静的な釣合条件だけでは、反力や断面力などの値が定まらない(不定)こと」を意味しており、「不静定次数」は、反力などの値を求めるために足りない条件の数を表わしている。

・本書のⅠ、Ⅱ巻で扱った問題はすべて「静定(せいてい)」の構造である。すなわち「釣合条件のみで反力を求めることが出来る構造」であったことに気がついてほしい。

・不静定次数を求めるためには、静定構造を基準にして、未知数と釣合条件がどのように増減するかを考えたほうが容易である。本書では、この考えを基本にした「Treeの方法」を紹介する。

基礎知識

◉「釣合条件」とは

①対象としている部分が移動しないこと、②回転しないこと、の 2 条件を表わしたものである。①に対しては直交する 2 つの方向の式($\Sigma X = 0$、$\Sigma Y = 0$)で、また②に対しては任意点を中心にしたモーメント(回転力)の式($\Sigma_i M = 0$)で、それぞれ表わされる。まとめれば、「対象としている部分に対して釣合条件は 3 個ある」。

◉未知数の変化

本書のⅠ、Ⅱ巻において、次の 2 つのケースで釣合条件を用いて未知数を求めている。それぞれ場合において、釣合条件が対象としている部分に注目してほしい。

①支点反力:「架構全体」を対象とした釣合条件により、未知数の支点反力を求める。

②断面力:任意の位置の断面力(N、Q、M)を未知数として、その点で架構を切断した「架構の一部」を対象とした釣合条件を用いて、断面力を求める。

このように、未知数は何を解くか、により変化しており、このままでは不静定次数を求めるには不適当である。

◉架構は「部材」と「節点」に分けて考えることができる

この時、部材同士は節点を介して接合される。部材は任意に分割して分割箇所に節点を設けることができるが、実用上は部材が折れ曲がっている箇所(折れ点)を節点と考えれば問題はなく、本書では特記のない場合この考えを基本とする。

◉架構を切断すると

架構はどのように切断しても、切り取られた部分で釣り合う。すなわち切り口の断面力(N、Q、M)と外力、反力は釣り合う。

◉未知数

未知数は、「①部材両端部の断面力(N、Q、M)」と「②反力」とする。この時、節点に生じる断面力は、①の断面力の逆方向で同じ大きさの力として表わせるため、未知数として扱わない。

◉不静定次数の決定

不静定次数は荷重と無関係に定まる。すなわち、不静定次数mは次の数によって定まる。s:部材数　k:節点数　t:反力数　r:剛接数(曲げモーメントに関する未知数と、節点のモーメントの釣合条件数から定まる数)

◉不静定次数を求める方法

不静定次数mを求める「公式($m = r + s + t - 2k$)」と「Treeの方法」の 2 つの方法があるが、本書では主に図解的にmが求められる後者の方法を解説する。

両者の方法の原理は同じであるが、「Treeの方法」は「片持支持されたTree状の架構は部材が枝分かれしても静定である」ことを利用して、このTree状の架構との違いにより、未知数や釣合条件数の増減に着目した方法である。

なお、「公式($m = r + s + t - 2k$)」による方法は、P.14 の[Supplement]で解説する。

method Treeの方法

❶ 架構の形が一筆書きで描くことができ、かつ枝分かれや交差がない場合、m＝(反力数－3)＝t－3 から不静定次数が簡単に求まる。架構がこの条件に当てはまらない場合は手順❷に進む。 …… Point 1

❷ 架構を固定端が1つの片持形式のTree形状に分解する。 …… Point 2

❸ ❷の架構を接合して元の構造に戻す時、以下のそれぞれについて不静定次数がどれだけ増減するか、算定する。

(ⅰ)反力の数 …… Point 3

(ⅱ)部材の剛接合 …… Point 4

(ⅲ)中間ピンの挿入 …… Point 5

(ⅳ)枝分かれ部へのピンの挿入 …… Point 6

❹ ❸の(ⅰ)～(ⅳ)の数字を総和したものが、不静定次数となる。

m＞0…m次不静定構造　m＝0…静定構造　m＜0…不安定構造

Point 1 一筆描き形状の不静定次数

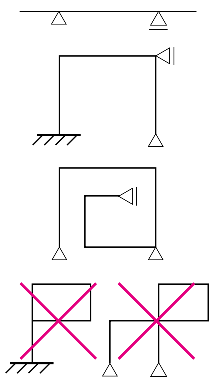
① 架構の一端から他端まで一筆描きで描ける形状であること。

② 一筆描きの途中で、部材の交差や接触がないこと。

③ 中間ピンがないこと。

①、②の2条件を満足すると、部材と節点が交互に配置され、端点以外の1つの節点には2部材が接続されることになる。また条件③については、Point 1 の後に、Point 5 の手順を経ることにより、中間ピンを有する一筆描きの架構について不静定次数を求めることができる。

←P.9の[Information Ⅰ]を参照。
[Point1 の対象架構]

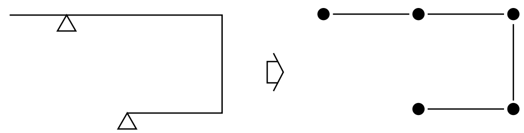


Information Ⅰ

不静定次数：m＝(反力数：t)－3となる理由

①架構の一端から他端まで一筆描きで描ける形状であること

②一筆描きの途中で、交差や接触がないこと



［元の構造］　［部材と節点］

上記①、②の条件より、架構が部材をn本に分割できる場合、節点数は(n＋1)個となる。これから、未知数と釣合条件の数は次のように求まる。

	※1 未知数の数 (X)	※2釣合条件の数 (Y)
部材数 s=n	6n	3n
節点数 k=n+1		3(n+1)
反力数	t	

※1 未知数(断面力)…1部材の両端の断面力が未知数となる。片端の断面力が3個(N、Q、M)あるため、1部材あたり6個が未知数。

※2 釣合条件は、部材ごと、および節点ごとに3個たてることができる。3個とは、(ΣX＝0、ΣY＝0、ΣM＝0)である。

これより、未知数の総数Xは(6n＋t)、釣合条件の総数Yは(6n＋3)となるため、不静定次数mは以下のように求まる。

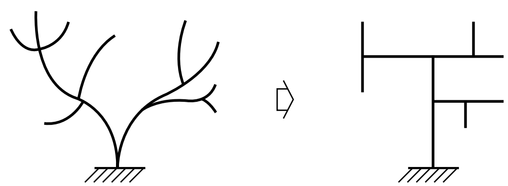
$$M = X - Y = (6n + t) - (6n + 3)$$
$$= t - 3$$

すなわち不静定次数mは(反力数：t)－3と求まる。

Point 2 Tree形状に分解

Treeの方法の基本

・木の形状はどのように枝分かれしても静定である。

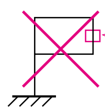


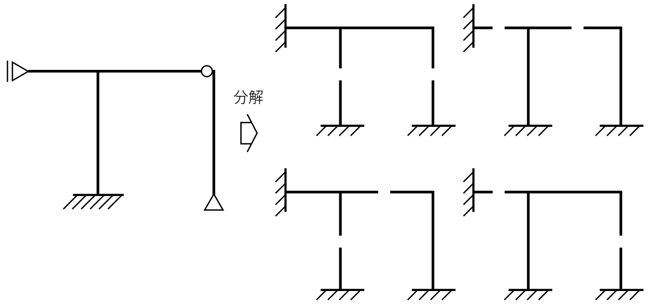
［Tree］　［Tree構造］

固定端が1つで、部材はいくら分岐(枝分かれ)しても「静定」である。

←P.12の[Information Ⅱ]を参照。

←枝同士が接合するとTreeでない。



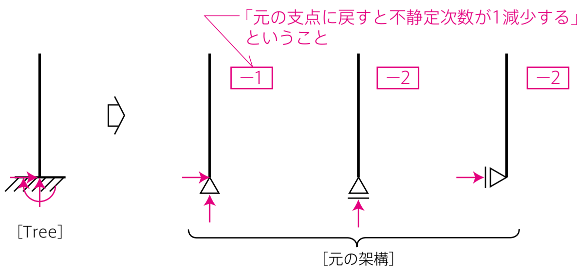


［いろいろな分解方法がある］

←コツ
・支点部はすべて固定端に変更する。
・中間ピンはすべて剛接に変更する。
・固定端（元の構造の支点部）の数だけ、Tree構造ができる。

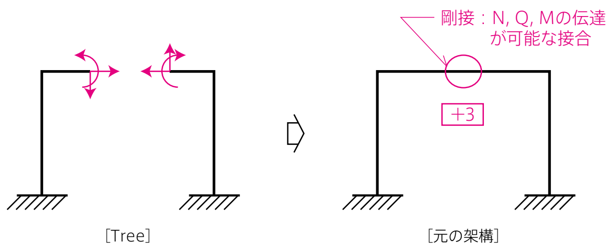
←どのように分解しても答は同じになる。

Point 3 固定端→元の支点に戻す際の不静定次数の増減



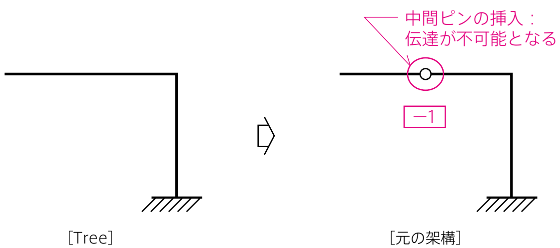
←「反力は未知数」であるから、反力が減少すると、その分、不静定次数が減少する。

Point 4 2つのTreeを剛接合する際の不静定次数の増減



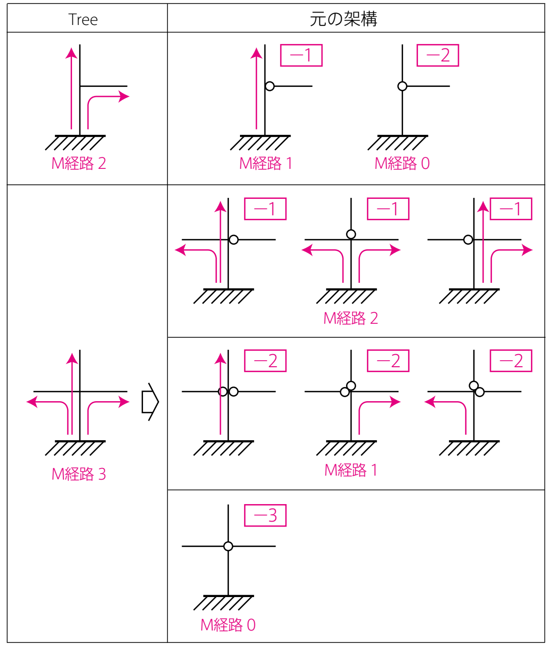
←P.12 の［InformationⅢ］を参照。本当は「釣合条件が3つ減る」のが正しいのだが、「未知数（N、Q、M）が3つ増える」と覚えてよい。

Point 5 部材に中間ピンを挿入する際の不静定次数の増減



←P.13 の［InformationⅣ］を参照。「Mの伝達経路が1つ減る」と覚えてよい。本当は「Mの未知数が2つ減り、節点の釣合条件が1つ減る」が正しい。

Point 6 分岐部へのピン挿入に伴う不静定次数の増減



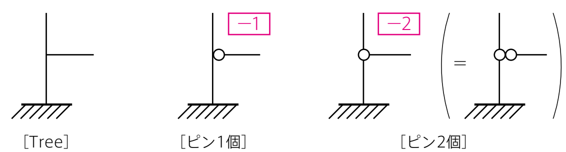
←P.13 の［InformationⅣ］を参照。「剛接数の減少」によるものであるが、「曲げモーメントの伝播経路が減る」と理解すればよい。「ピン1個あたり不静定次数が1つ減る」と覚えてもよい。

Memo

【Treeから元の架構に戻す場合の不静定次数の増減数（Δm）】

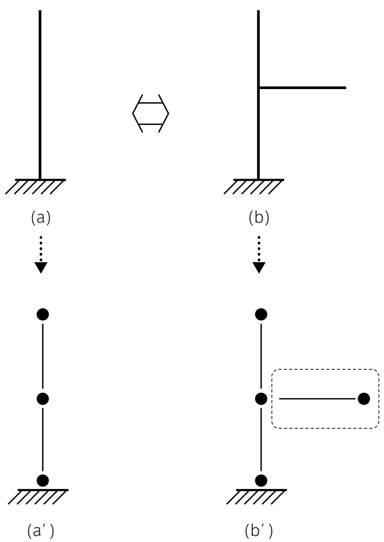
まとめ

・反力が固定端（3個）から減少→Δm＝−（反力の減少量）
・Tree同士を剛接合→Δm＝＋ 3/接合部
・Treeにピンを追加→Δm＝− 1/ピン1個



Information Ⅱ

Treeが枝分かれしても静定の理由



(a)と(b)の架構を比較して、部材を付加することにより、不静定次数が変化するか、検討を行う。
節点と部材を(a')と(b')のように分けて示すと、(b')の点線で囲んだ部分、すなわち１部材と１節点が増加している。

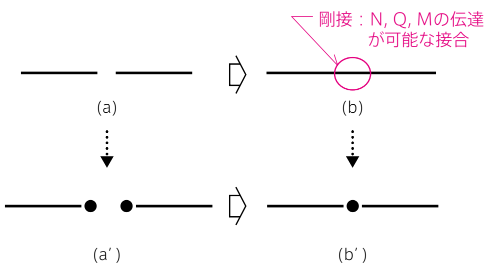
これに伴う、未知数と釣合条件の数の変化は次のようになる。

	未知数の数	釣合条件の数
部材数：s=1	6s=6	3s=3
節点数：k=1		3k=3
合計　Σ	6	6

これより、未知数と釣合条件の数の変化量は同じであるため、不静定次数に変化はない。同様の検討を続けることにより、Treeにいくら枝が付加されても静定構造であることが明らかである。

Information Ⅲ

２部材を剛接合することによる不静定次数の変化



(a)の自由端２つを剛接合して(b)のようにする場合を考える。
それぞれの状態の節点と部材を比較すると、(b')は(a')より節点が１つだけ減少していることに気がつく。これに伴い、節点の釣合条件が３つ減り、結果的に不静定次数は３つ増加することになる。

Information Ⅳ

ピンの付加に伴う剛接数rの変化

剛接数rは以下のように定義できる。

$$r=\underbrace{\begin{pmatrix}\text{ある節点に集まる}\\\text{部材端の曲げモー}\\\text{メントM}\neq 0\text{の数}\end{pmatrix}}_{M_n}-\underbrace{\begin{pmatrix}\text{ある節点の}\\\text{モーメントの}\\\text{釣合条件の数}\end{pmatrix}}_{M_e}$$

次表に、ある節点に集まる部材数が２～４本の場合のM_n、M_e、r、Δr(全部材が剛接の場合に対するrの増減数)を示す。M_nとM_eからrを求めることができるが、図中の矢印で示した「曲げモーメント伝達経路数」から図的に容易に求められる。ぜひ修得してほしい。

結合部材数	接合タイプ	部材端Mの未知数の数 M_n	Mの釣合条件の数 M_e	r	剛接に対する増減 Δr
2	M経路 1	2	1	1	-
	M経路 0	0	0	0	−1
3	M経路 2	3	1	2	-
	M経路 1　M経路 1	2	1	1	−1
	M経路 0	0	0	0	−2
4	M経路 3	4	1	3	-
	M経路 2　M経路 2	3	1	2	−1
	M経路 1　M経路 1	2	1	1	−2
	M経路 0	0	0	0	−3

Supplement

【公式m＝r＋s＋t－2kを導く】

ここでは、不静定次数mを求める次式を導いてみる。

m＝r＋s＋t－2k ……………………	m＞0 不静定	
r：剛接数 s：部材数	m＝0 静定	…………(1)
t：反力数 k：節点数	m＜0 不安定	

(ⅰ)剛接数を用いずにmを求める

・未知数の数……………… 部材両端の断面力：6s ／ ……………… 反力：t ］(6s＋t)個 …………(2)

※部材両端の断面力１本の部材あたり

６個の未知数……s本では6s

・釣合条件の数 ………………………… 部材：3s ／ … 節点：3k ］(3s＋3k)個 …………(3)

※釣合条件

・１本の部材あたり

３個(ΣX＝0, ΣY＝0, Σ_iM＝0)……s本では3s

・節点も同様

……k個では3k

・不静定次数m

m＝(未知数の数)－(釣合条件の数)

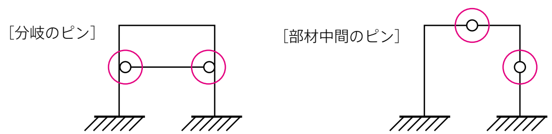
$$＝\underbrace{(6s＋t)}_{式(2)}－\underbrace{(3s＋3k)}_{式(3)}$$

＝3s＋t－3k ………………………………………………………………(4)

(ⅱ)剛接数の導入

式(4)は剛接だけの架構には用意に適用可能であるが、部材中間部や部材分岐部にピンが挿入された場合、式(2)や(3)に戻って考える必要がある。ここで、これらのピンの挿入に対応するために次式で定義される「剛接数r」を導入する。

※剛接数についてはP.13の[InformationⅣ]を参照。



剛接数r＝(部材端におけるMの未知数の数(M≠0))－(節点におけるモーメントの釣合条件の数)

r＝M_n－M_e ………………………………………………………(5)

rは「曲げモーメントに関する不静定次数」と言い換えることもできる。

以上のことからrに関わる項目以外の未知数と釣合条件の数は次のように表わせる。

・未知数の数………… 部材両端の断面力(N、Q)：4s ／ …………………… 反力：t ］(4s＋t)個 …………(6)

※部材両端の断面力は曲げモーメント以外の断面力

・釣合条件の数…………………………… 部材：3s ／ … 節点：2k ］(3s＋2k)個 …………(7)

※節点の釣合条件からΣM＝0を除く

・不静定次数m

m＝r＋(未知数の数)－(釣合条件の数)

$$＝r＋\underbrace{(4s＋t)}_{式(6)}－\underbrace{(3s＋2k)}_{式(7)}$$

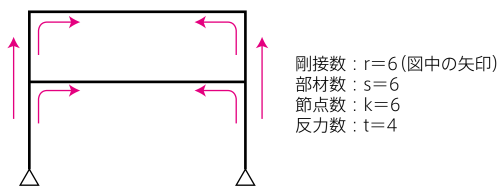
＝r＋s＋t－2k ………………………………………………………(8)

式(8)が、不静定次数を求める公式である。

なお、トラス構造の場合はr＝0となるため、m＝s＋t－2k

check 問題

次の架構の不静定次数をP.14の[Supplement]の式(2)〜(4)の方法と式(8)の公式を用いた方法により求めよ。



check 解答

【式(2)〜(4)】の方法

(未知数の数)＝6s＋t＝6・6＋4＝40

(釣合条件の数)＝3s＋3k＝3・6＋3・6＝36

∴m＝40－36＝4　→４次不静定

←式(4)を用いると、
m＝3s＋t－3k
＝3・6＋4－3・6
＝4

【式(8)】の方法

m＝r＋s＋t－2k

＝6＋6＋4－2・6＝4　→４次不静定