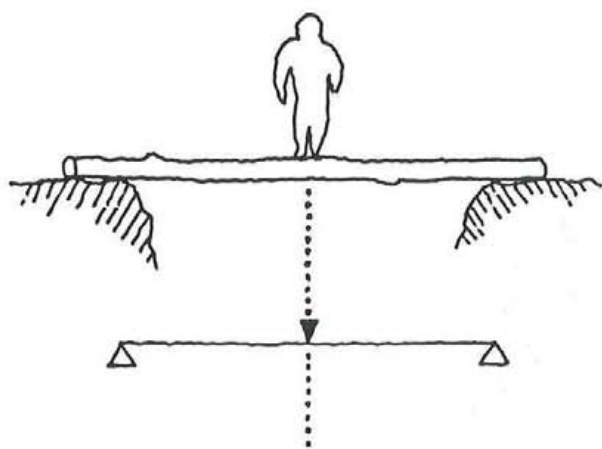




建築材料力学

榎並 昭著



まえがき

材料力学は、構造物に荷重が加わった場合に生ずる応力や変形についての基礎的な事項を取り扱う応用力学の一分野である。参考文献に掲げたように数々の名著が出版されている。これらの中には、絶版になったもの、復刻版として再版されたものなど、かなりの年数を経たものもあるが、内容が基本的かつ基礎的な事項であるから、主要な部分は現在でも変わることなく通用する。建築、土木、機械等の工学の部門では共通のものであるが、それぞれの分野で取り扱われる構造物が異なるので、特に必要とする部分はかならずしも同じではない。本書は建築構造に関連する部分を対象として書いてある。

著者は大学の建築学科で、応用力学（材料力学）の講義や演習を38年余りにわたって担当してきたが、本書はこれまで行ってきた講義の内容をまとめたものである。講義の時間は年間30時間と限られているので、講義時間中には述べることのできなかった部分についても書き加えた。大学では、材料力学は専門課程の応用力学の分野で最初に学ぶ科目であるが、建築の学生にとっては、どちらかといえば苦手の科目である場合が多いように見受けられる。このことを考慮して、初心者向けに書いたもので、いく分くどいと思われる方もおられるかも知れない。

本書で取り上げたのは、柱や梁のような線材のみである。構造物には壁や床のような平板、シェル構造のような曲面板もあるが、その解析は応用弾性学で取り扱う分野としてここでは取り上げなかった。また線材を組み合わせた骨組（ラーメン構造やトラス構造）の解析は、建築の分野では構造力学として別に取り扱われているので、本書では主として単一材の応力や変形について述べている。

実際の構造物の設計では、地震時のような短期的な荷重に対して、材料の弾性域を超えた塑性域をも考慮した応力や変形、あるいは崩壊のような極限状態の検討までも行われるようになってきている。材料が塑性状態にはいる条件や、その取扱いについても触れたいと考えていたが、三次元問題の説明が必要となることから、今回は弾性の範囲にとどめることにした。いずれ機会があれば、塑性力学の初歩的な部分を書き加えたいと思っている。

本書の執筆を引き受けてから10年以上が経過してしまった。いろいろと忙しかったために執筆の時間をとることができなかったのであるが、各方面にご迷惑をおかけしたことをお詫びしたい。

構造物の構造計算に電子計算機を利用する機会が多くなって、ややもすれば力学の基本的な事項を見過ごしてしまいやすい状態におかれているこのごろであるが、初心者の学生諸君のみならず、実務に携わる技術者の方々にも本書がお役に立てば幸いである。

平成元年4月

榎 並 昭

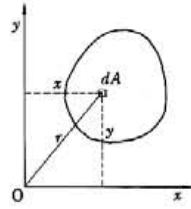
目 次

1 力	9
1.1 外力と内力	9
1.2 力の釣合い	9
2 応力度	13
2.1 軸方向力と垂直応力度	13
2.2 せん断力とせん断応力度	15
2.3 断面の方向と応力度の変化	16
2.4 せん断応力度の共やく(軋)性	17
2.5 応力の変換	18
2.6 モールの応力円	21
3 ひずみ度	25
3.1 伸びおよび縮みと垂直ひずみ度	25
3.2 せん断ひずみ度	26
3.3 断面の方向とひずみ度の変化	27
3.4 ひずみ度の変換	29
3.5 モールのひずみ円	33
3.6 体積ひずみ	36
4 フックの法則	39
4.1 弾 性	39
4.2 応力度とひずみ度	39
4.3 実際の材料の応力度とひずみ度の関係	41

5	軸方向力・曲げモーメント・せん断力	49
5.1	支持形式	49
5.2	線材を用いた構造の軸方向力	50
5.3	曲げモーメントおよびせん断力	55
6	断面の性質 (量)	63
6.1	断面積	63
6.2	断面1次モーメントと図心	63
6.3	断面2次モーメント	68
6.4	断面相乗モーメントと断面の主軸	71
6.5	断面の主軸のまわりの断面2次モーメントと、図心を通る主軸でない軸の断面2次モーメントおよび断面相乗モーメントの関係	74
6.6	断面極2次モーメント	75
6.7	断面2次半径	76
7	曲げ応力と軸曲げ応力	77
7.1	曲げ応力	77
7.2	軸方向力と曲げモーメントの組合せ応力	80
8	せん断応力	85
8.1	せん断応力度	85
8.2	薄肉断面とせん断中心	87
9	曲線材の曲げおよび軸曲げ応力	91
9.1	曲げ応力	91
9.2	軸・曲げ応力	94
10	たわみ曲線	97
10.1	曲げ変形の基本式	97

10.2	曲げモーメントによるたわみ曲線——境界条件と連続条件	99
10.3	不静定構造	106
10.4	弾性的に連続支持された場合	112
11	変形の仕事 (ひずみエネルギー)	119
11.1	力のなす仕事と変形の仕事	119
11.2	単位体積当りのひずみエネルギー	121
11.3	軸方向力 N によるひずみエネルギー	122
11.4	曲げモーメント M によるひずみエネルギー	124
11.5	せん断力 Q によるひずみエネルギーおよびせん断変形	126
11.6	変形の仕事の定理	129
12	ねじり	149
12.1	円形断面をもつ部材のねじり	150
12.2	中空円筒部材	152
12.3	長方形断面の場合	153
12.4	ねじり角およびひずみエネルギー	155
13	座屈	159
13.1	長柱の弾性曲げ座屈荷重	160
13.2	座屈応力度	169
13.3	エネルギー法	170
	参考文献	173
	付録	175
	索引	180

のに対して、断面極2次モーメントの場合の回転軸は、断面を含む平面に垂直の方向をもつ。したがって断面がその平面内で回転運動をする場合の抵抗量を表すものである。円形断面材のねじりや、柱と梁の仕口部でのボルトのせん断抵抗による曲げモーメントの伝達などの場合に、このような量が考慮されることになる。



6.14図
断面極2次モーメント

6.14図に示したように、断面と同じ平面内に直角座標軸 x, y をとれば、

$r^2 = x^2 + y^2$ の関係から

$$I_p = \iint_A (y^2 + x^2) dA = I_x + I_y \quad (6.33)$$

が得られ、 x, y 軸のまわりの断面2次モーメントの和として値を求めることができる。

次元および単位は長さの4乗で、 $[L^4]$ 、 mm^4 、 cm^4 などで表され、断面2次モーメントと同じである。

6.7 断面2次半径

断面2次モーメントを I 、断面積を A とするとき

$$i = \sqrt{\frac{I}{A}} \quad (6.34)$$

で表される量を断面2次半径 (radius of gyration of area of cross section) という。次元および単位は長さで、 $[L]$ 、 mm 、 cm などで表される。回転軸からの距離 i の位置に、断面積 A が集中して存在している場合の断面2次モーメントと同じ値が I である。断面積の代わりに剛体の質量を考えた場合は回転半径と呼んでいる。

与えられた断面で、図心を通る軸のまわりの断面2次モーメントが、軸の方向によって変化することは前節で述べた。(6.34)式の I に主軸のまわりの断面2次モーメントを適用する機会が多いが、問題によって、 I の最大値をとるか、最小値の方をとるかを適切に判断することが重要である。

7 曲げ応力と軸曲げ応力

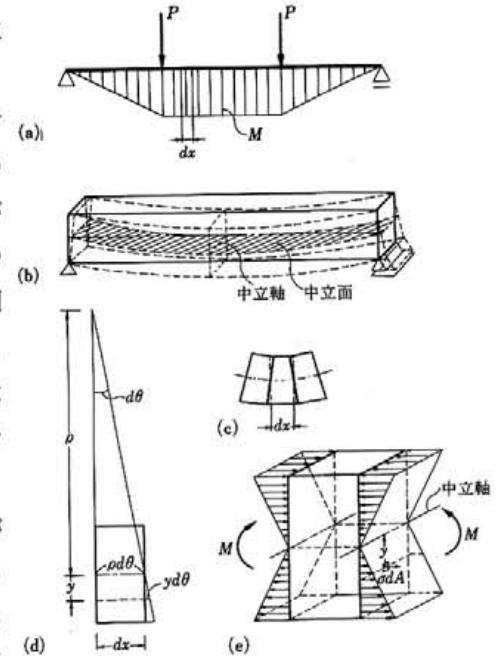
7.1 曲げ応力

7.1図(a)に示したような荷重の加わった梁は、曲げモーメントを生じて図(b)に示したように曲がる。

梁の微小な区間 dx を取り出して考えると、図(c)のように、区間 dx の両端の載荷前に平行であった断面が相対的に回転して扇形になる。この扇形が連続すると梁全体として図(b)のように曲がることになる。

この問題の場合には、梁に軸方向力は生じないから、長さの変化は生じない。図(c)のように扇形になると、上側は下側よりも材軸方向の長さが小さいが、梁丈(せい)の中間に長さの変化のない位置がなければならず、上側が縮み、下側が伸びた結果と考えられる。この材軸方向の長さ

の変化の生じない面(図(b))を中立面(neutral plane)という。また断面と中立面の交線を中立軸(neutral axis)という。そこで、断面は中立軸のまわりに回転することになるが、その際平面を保ちながら回転すると仮定することにより、これからの議論が簡単になる。この仮定をナビエ(Navier)の平面保持の仮定という。変形前に材軸に直角であった断面は、変形後も材軸に直角である。微小区間 dx でも材軸は変形前の直線から曲線に変形することになるが、変形が微小であれば、直線と曲線の長さは近似的に等しいと考えることができる。図(d)のように、微小要素の左側の断面を基準として、 dx の区間で両側断面が相対的に $d\theta$ だけ回転



7.1図 曲げ変形と曲げ応力度

12.1 円形断面をもつ部材のねじり

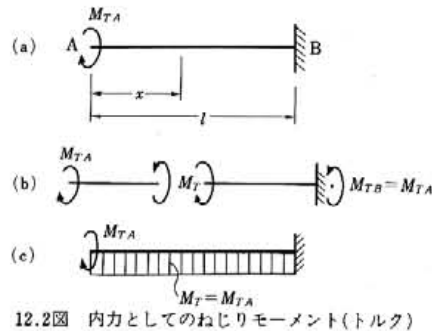
12.2 図(a)のような断面が円形の片持ち梁の先端にねじりモーメントが加わった場合について考える。先端 A から任意の距離 x の位置で梁を切断し、先端部分 (x の区間) での釣合いを考えると、断面 x でのねじりモーメント M_T (図(b)) は

$$M_T = M_{TA} \quad (12.1)$$

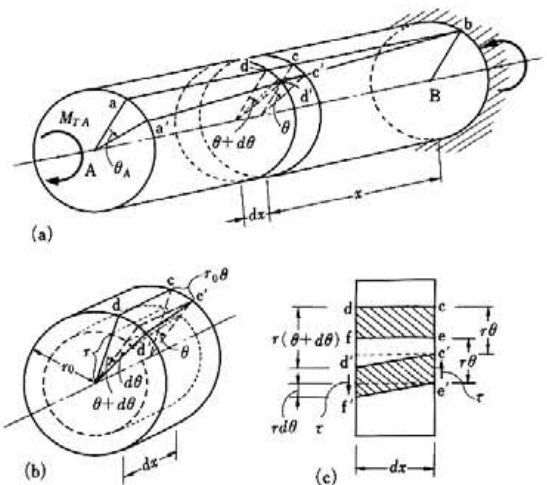
となり、 x に関係なく梁の全長にわたって一定である (図(c))。

この梁を立体的に描くと

12.3 図(a)のようになる。部材の表面に、材軸に平行な母線 ab を引くと、一定のねじりモーメントによって、この母線は $a'b$ に移動し、先端断面 A は材軸のまわりに θ_A だけ回転する。この回転の間中、断面形は変わらず平面が保たれるものとする。この仮定 (平面保持の仮定) は、微小変形の間は円形断面部材の場合には実際とよく一致する。固定端から任意の距離 x の断面は θ 、先端 A 断面は θ_A だけ回転するが、この断面の回転角をねじり角 (angle of twist) と呼ぶ。任意の位置の x 断面のところから長さ dx の微小区間を取り出したものを図(b) に示す。母線 cd は変形後 $c'd'$ に移動するが、 cc' の方はねじり角が θ であるのに対して、 dx 離れた断面の dd' の方はねじり角が $\theta + d\theta$ であるために cd と $c'd'$ は平行ではない。この要素を側面から見て、任意の半径 r の面を展開すると図(c)のようになる。図(b)では c, d, c', d' は部材表面、すなわち半径 r_0 の面上の点であるが、図(c)では半径 r の面上でそれぞれの点と同じ半径上にある点に対して同



12.2 図 内力としてのねじりモーメント(トルク)



12.3 図 ねじり変形

じ記号を用いてある。したがって、 $\overline{cc'} = r\theta$ 、 $\overline{dd'} = r(\theta + d\theta)$ になる。 r が r_0 になると図(b)の cc' 、 dd' になる。母線 cd に平行なもう 1 本の母線 ef をとれば、 $e'f'$ に移動し、 $c'd'$ と平行になる。そこで図中に斜線をつけた長方形 $cdfe$ は変形後に平行四辺形 $c'd'f'e'$ となる。この状態は、 $r\theta$ の平行移動とせん断変形に分けることができ、平行移動の部分は、長さ dx の部分の剛体としての回転に基づくもので応力とは関係しない。せん断変形は $c'e'$ よりも $d'f'$ の側が $rd\theta$ だけ多く移動していることによるもので、この移動の差によってせん断ひずみ

$$\gamma = r \frac{d\theta}{dx} \quad (12.2)$$

が生じる。ここで

$$\varphi = \frac{d\theta}{dx} \quad (12.3)$$

は部材の単位長さ当りのねじり角 θ の変化量を表すもので、ねじり率 (換率=れいりつ) (angle of twist per unit length または torsion) と呼んでいる。これを用いると、せん断ひずみは $\gamma = r\varphi$ で表され、対応するせん断応力 τ は次式で表される。

$$\tau = G\varphi r \quad (12.4)$$

このように、ねじりに伴って生ずる応力はせん断応力度であり、円形断面の中心からの距離 r に比例した大きさをもつ。この状態を断面上に描くと、12.4 図のようになり、せん断応力は同心円の接線方向を向いて、材軸のまわりに断面を回転させるような向きをもつ。

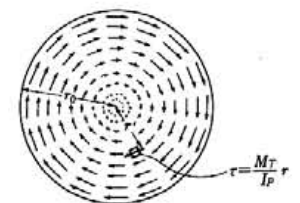
このせん断応力の材軸のまわりのモーメントの、断面全部についての和はねじりモーメントに等しくならねばならない。

$$M_T = \iint_A r \cdot \tau dA = G\varphi \iint_A r^2 dA = GI_P \varphi \quad (12.5)$$

ここで、 I_P は円形断面の円の中心 (図心) のまわりの断面極 2 次モーメントで、 $I_P = \pi r_0^4 / 2$ である。この式から、ねじり率 φ は

$$\varphi = \frac{M_T}{GI_P} \quad (12.6)$$

ここで、 GI_P はねじり剛性 (torsional rigidity)



12.4 図 ねじりによる応力度分布

(13.17)式で n が 1, 2…… の場合には座屈荷重は, 9 倍, 25 倍…… と増大し, たわみ曲線は図(d) (e)のように, 座屈長さが実長 l の 2/3 倍, 2/5 倍…… となるが, 実際にはこのようにはならない。

13.7 図(a)のように一端固定, 一端回転端の場合には, 図(b)に示したように, 回転端に横方向の変位を止めるための反力 R が生じる。座標軸を図のようにとれば, 任意の位置 x の曲げモーメントは

$$M = P_k y + R(l - x) \tag{13.20}$$

たわみ曲線の基本式(10.4)式に代入して

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = -M = -P_k y - R(l - x)$$

(13.3)式と同様な k を用いれば, 上式は次のようになる。

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + k^2 y = -k^2 \frac{R}{P_k} (l - x) \tag{13.21}$$

この微分方程式の一般解は

$$y = A \sin kx + B \cos kx - \frac{R}{P_k} (l - x) \tag{13.22}$$

固定端での境界条件 $x = 0, y = 0$, から $B = Rl/P_k$, また, $dy/dx = 0$ から $A = -R/kP_k$ が得られ, これらから $B = -k l A$ が得られる。回転端 $x = l$ で $y = 0$ の条件と A, B の関係から

$$y = A(\sin kl - kl \cos kl) = 0 \tag{13.23}$$

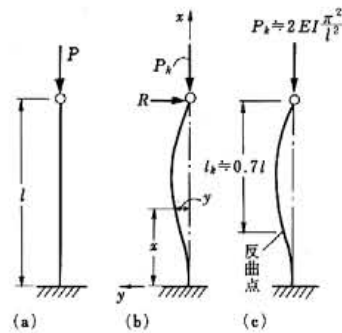
$$\therefore \tan kl = kl \tag{13.23}$$

が得られる。この条件を満足する kl の最小値は $kl \approx 4.4934 \approx 1.4303 \pi$ である。

$$\therefore k = 4.4934/l = 1.4303 \pi/l = \pi/0.6992 l \tag{13.24}$$

$$\therefore P_k = 20.1907 \frac{EI}{l^2} = 2.0457 EI \frac{\pi^2}{l^2} = EI \frac{\pi^2}{(0.6992 l)^2} \tag{13.25}$$

これを通常は近似的に

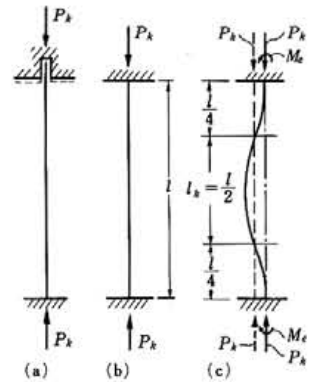


13.7 図

$$P_k \approx 2 EI \frac{\pi^2}{l^2} \approx EI \frac{\pi^2}{(0.7 l)^2} \tag{13.26}$$

としている。座屈長さは $l_k = 0.6992 l \approx 0.7 l$ である。

両端が回転および横移動を拘束された 13.8 図(a)のような場合は, 通常両端固定と称し, 図(b)のように表す。座屈に対して両端に曲げモーメントが生じるが, 上下対称であることから, 曲げモーメントも曲げ変形も対称となる。また, 固定端の軸方向荷重(座屈荷重 P_k)と曲げモーメント M_e を, $e = M_e/P_k$ だけ偏心した軸方向(元の部材の)荷重 P_k に置換して考えると, その作用線と変形した部材の交点は曲げモーメントが 0 の反曲点になる。この二つの反曲点の間は,



13.8 図

両端回転端の場合と同じ変形を生じ, その区間の長さは $l/2$ である(図(c))。したがって, 座屈長さ $l_k = l/2$ であり, オイラーの式(13.10), (13.11)によって

$$P_k = EI \frac{\pi^2}{(l/2)^2} = 4 EI \frac{\pi^2}{l^2} \tag{13.27}$$

以上のように直線圧縮材の座屈荷重は, 同一の材料, 同一の断面, 同一の長さをもったものでも, 両端の拘束条件によって大きく変化する。表 13.2 に, これまでに示した拘束条件の違いに対応する座屈荷重をまとめて示した。

13.2 表 両端の拘束条件と弾性座屈荷重

$P_k = CEI \frac{\pi^2}{l^2} = EI \frac{\pi^2}{l_k^2}$				
拘束条件	一端固定・他端自由	両端回転端	一端固定・他端回転端	両端固定
座屈形状				
C	1/4	1	2	4
l_k	2l	l	0.7l	l/2