

図説

土木工学
基礎講座

土質力学

赤木寛一
小宮一仁一著

彰国社

まえがき

2000年代初頭にあって、1000年代にわれわれが作り上げてきた価値観の大きな変更が求められている。人類の誕生以来、その生存を支えてきた土木工学という学問にも同じことがいえる。土木工学のサバイバルのためには、現代人間社会の安全と健康を守るために土木工学が寄与し得ることを防災と環境保全に関する具体的な技術として提示することが不可欠である。

そのためには、現状の土木技術水準をわかりやすいかたちで公開していくことが必要である。わかりやすいかたちで公開するための方法が、現状の土木関連施設の設計体系を従来の仕様規定型から性能規定型へ劇的に転換させることである。性能規定とは何か。まず、対象となる施設、たとえば、ある橋やトンネルが有すべき目標性能を、たとえばマグニチュード7の地震に対して安全であることのように定める。次に、実際にその施設ができあがったときに有する達成性能を、たとえばマグニチュード7の地震に対する地盤の変形は人命に直接被害を及ぼさないことを、性能評価手法を用いて明らかにして表示する必要がある。これが、性能規定の全容である。従来、明らかにされることのなかったこれらの情報を公開することによってはじめて、広く土木技術への信頼性が確立され、土木技術の生き残りにつながると著者らは考える。

性能規定型設計体系具体化への道は、まず対象となる橋やトンネルなどの土木関連施設に生じ得る現象、たとえば地震時に破壊現象が発生するに至るまでの各種の要因とそのプロセス、具体的には構造骨組の崩壊、構造設備部品の脱落や地盤自体の変形破壊などのシナリオを適切に描くことが必要である。シナリオとは脚本である。この場合の脚本は、SF映画のように荒唐無稽では使えない。このシナリオは、科学的にどのような現象が生じ得るかを正しく記述している必要がある。このシナリオに従って、土木関連施設の目標性能が設定される。また、このシナリオに従って起こる現象を工学的に具体的に再現し、評価する技術がシミュレーションである。このシミュレーション技術によって、その土木関連施設の達成性能が目標性能に照らして照査される。

以上を要約すると、適切なシナリオライターとなるためにも、正確なシミュレーションを行うためにも自然科学、とりわけ力学現象に関する深い理解が不可欠である。

本書は、著者の一人が早稲田大学理工学部土木工学科の土質力学の講義において15年にわたって使用してきた講義ノートがその母体である。本書のねらいは、応用力学の一部門を構成する土質力学の姿を力学の一般的な枠組みをできるだけ保ちながら解説することである。力学の枠組みとは、三つの保存則と一つの構成則によって数式で記述された連続体の力学場における方程式を境界条件と初期条件を用いて解くことである。すべての土質力学の問題が、この力学の枠組みに従って解けるものではない。にもかかわらず、それに近づこうと努力して記述したものが本書である。本書を通して読者に、その意図である「微分、積分で解く土質力学」をわずかでも感じ取っていただき、性能設計への途を歩む一助となるならば、著者にとって望外の幸せである。

本書の使い方

本書では、土質力学におけるさまざまな工学的・実務的な問題を解くこと、あるいは解決する方法を示すことよりも、土の力学的挙動が生じる基本的なしくみを体系的に理解してもらうことを目的としている。そこで本書では土質力学の内容を、読者が物理学あるいは応用力学の知識で理解できるように、大胆にかみ砕いて説明をするように努めた。このため、実際には3次元である土質力学の諸現象を、あるときは1次元の問題として、また、あるときは2次元の問題として簡潔に表現した。

また本書では、土質力学を連続体力学の枠組みの中で扱うこととし、説明には微分・積分の記述を多用した。読者の理解を助けるために、微分方程式の誘導あるいは、その解法にはできる限り詳細な説明を示し、高等学校卒業程度の微分学・積分学の知識で十分に理解が進むように配慮した。元来、このような数式はただ眺めるだけでは意味がないことなので、本書に示した方程式の誘導あるいは解法を読者自身の手で追い、数式で記述された力学的な意味を頭で汲み取ることが、本書の内容を理解するための必要不可欠な条件になっていることは言うまでもない。

本書の主文を理解することによって土質力学を体系的にとらえる学力は十分につくように考慮したが、もう一歩進んだ内容を理解したいと感じる読者のために、各章に数編のコラムを設けた。コラムには、より高度な内容あるいは実際的な方法が数多く記述されているが、最初コラムは飛ばして読んでいただいても差し支えない。また理解の程度を判断することに役立つだろうと考え、主要な章末に演習問題を添えた。

目次

まえがき

1 土質力学の目的と内容	9
1-1 土質力学の位置づけ	9
1-2 土および地盤に関する問題の理論構造	10
2 土の見きわめ方	11
2-1 土の基本的性質	11
2-1-1 土の特徴	11
2-1-2 土粒子ができるまで	11
2-1-3 礫粒子、砂粒子の構成鉱物	12
2-1-4 シルト粒子、粘土粒子の構成鉱物	12
2-1-5 砂の単粒構造と粒度特性	13
2-1-6 粘土のベッド構造とコンシステンシー特性	13
2-2 混合体としての土の特性	14
2-2-1 土粒子の密度と比重	14
2-2-2 土の湿潤密度	15
2-2-3 土の含水比	15
2-2-4 土の乾燥密度	15
2-2-5 土の間隙比	15
2-2-6 飽和度	16
2-2-7 密度と単位体積重量の区別：SI単位	16
3 土中の応力とひずみ	18
3-1 連続体力学の枠組み	18
3-2 連続体の応力	18
3-3 土の有効応力の考え方	19
3-3-1 土の全応力、有効応力と間隙水圧	19
3-3-2 せん断に抵抗する土粒子と抵抗しない水	21
3-4 地盤内の応力	22
3-5 任意の平面上の応力の求め方	23
3-6 土のひずみ	25
3-7 任意の方向のひずみの求め方	25
3-8 弾性体の応力～ひずみ関係式	26

3-9 弾塑性体の力学の基礎と応力～ひずみ関係式	27
4 土中の水の流れ	29
4-1 土中の透水現象と透水力	29
4-1-1 土の透水係数	29
4-1-2 透水力の求め方	32
4-2 地盤内の浸透流	32
4-2-1 1次元の浸透方程式	32
4-2-2 2次元浸透方程式	33
4-2-3 流線網による浸透流の求め方	34
5 粘土地盤の圧密沈下	40
5-1 粘土の圧密現象	40
5-2 海底粘土地盤の埋立てによる圧密現象	42
5-3 粘土の圧密に関する理論	44
5-4 粘土地盤の圧密沈下量の求め方	47
5-4-1 圧密支配方程式の解法	47
5-4-2 圧密に要する時間と沈下量	48
6 せん断と圧密～土の限界状態モデル	54
6-1 土の限界状態モデル	54
6-2 砂のせん断強度	57
6-3 粘土のせん断強度	59
7 地盤の破壊と安定	65
7-1 土圧の考え方	65
7-1-1 クーロン土圧	65
7-1-2 ランキン土圧	67
7-2 斜面安定の考え方	68
7-2-1 円弧すべり面法	69
7-2-2 無限斜面の安定	71
7-3 支持力の考え方	71
7-3-1 円弧すべり面法	72
7-3-2 地盤内部の応力に着目した方法	73
7-4 特性曲線法	74

コラム① 土粒子の密度 ρ_s の求め方	15
コラム② モールの応力円の使い方	24
コラム③ ブーシネスクの解	27
コラム④ 粘土の1次元圧密試験	46
コラム⑤ 土の一軸圧縮試験, 三軸圧縮試験	56
第4章の演習問題	37~39
第5章の演習問題	50~53
第6章の演習問題	62~64
第7章の演習問題	77~79
演習問題の解答	80~83
索引	84

3 土中の応力とひずみ

3-1 連続体力学の枠組み

連続体力学とは巨視的尺度で見た材料の力学特性を研究する学問である。巨視的な力学特性とは、3次元ユークリッド空間と一様に流れる時間のもとで、Newton力学によって支配される材料の挙動である。ここで定義される連続体 (Continuum) という概念は、質量、運動量、エネルギーの各密度および圧力、温度を保持したまま体積を無限小にしたときにできる仮想の物質粒子の集合体として材料をとらえたものである。したがって、連続体力学は材料の構造については何の仮定も設けない。

これに対して、材料はさまざまなスケールで構造を有している。材料の外形、言い換えると、境界によって区切られる構造は最もスケールの大きなものであり、次いで部材や要素に分けられる構造がある。より微視的に観察を行うと、金属であれば結晶粒や分子によって構成される構造があり、地盤にはさまざまな粒径の土粒子によって構成される構造がある。このレベルまで考察すると、構造をもたない材料は存在しない。

一見すると、構造を有する材料の力学特性、すなわち応力～変形挙動の解析に連続体力学の理論を用いることには矛盾があるように思える。たとえば図-3-1のような土の塊は、前章2-1-1で述べたように、固体である土粒子と間隙に存在する水および空気によって構成される微視的な構造の集まりである。この土塊が力を受けて変形す

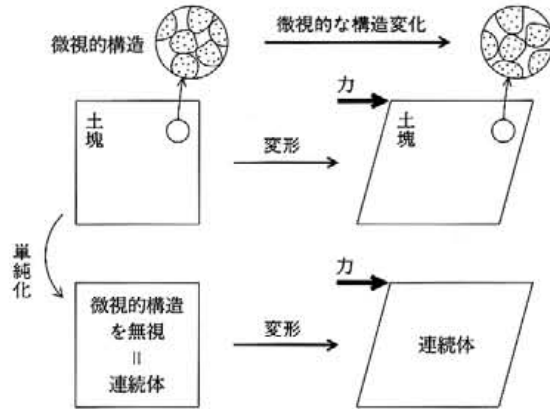


図-3-1 連続体の概念

ると微視的構造も変化するが、土に関する力学的問題の多くは、この微視的構造の変化よりも土塊そのものの変形や力のつり合いに関するものである。このような土塊の変形に微視的構造変化が大きな影響を及ぼす場合もある⁵⁾。しかしながら材料の応力～変形挙動の多くは材料の微視的な構造には鈍感であり、異なる微視的構造をもつ材料に共通な挙動が問題にされることが多い。このような立場では、材料の応力～変形挙動に大きく影響するレベルの構造 (図-3-1では土塊の外形) のみを考慮し、適用範囲を明確にすることによって、連続体力学に基づく数学的な取り扱いが容易になる。

と定義できる。

ここに垂直応力 σ_n (Normal stress) とせん断応力 τ (Shear stress) である。また、主応力 (Principal stress) $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ は、せん断応力がゼロであるような平面上の垂直応力であり、そのような平面を主面 (Principal plane) と呼ぶ。三つの主面上では

$$\sigma_n = |\vec{T}|, \tau = 0 \quad (3-2)$$

3-2 連続体の応力

われわれが認識できる最も基本的な力学場における量は力と変位である。ここでは、連続体力学における力の表現のひとつである応力の定義を示す。図-3-2に示すように連続体として考えた土塊内の仮想断面を考える

$$\vec{T} = \lim_{dA \rightarrow 0} \frac{d\vec{P}}{dA} = \{\sigma_n, \tau\} \quad (3-1)$$

が成り立ち、それらは互いに直交する。

連続体力学では、垂直応力に関しては引張り方向の大きさを正值にとるのが一般的である。しかしながら地盤が引張り応力を受けることはきわめてまれであるので、土質力学では逆に圧縮応力の大きさを正值にとることが習慣になっている。本書においても、これに従い、垂直応力に関しては圧縮応力の大きさを正值に、引張応力の大きさは負値で表す。

せん断応力 τ の正負については以下のように考えることにする。図-3-3のように互いに直交する座標平面 $x-y$ を考え、座標の矢印方向をそれぞれ正方向とする。ここに図に示すようなその辺 (紙面に垂直な方向の奥行

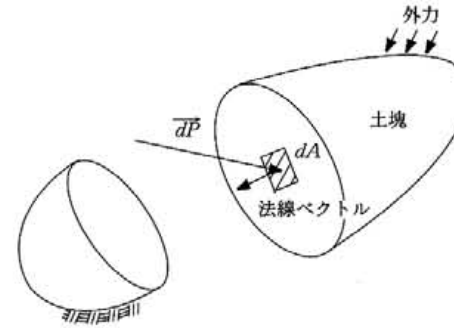


図-3-2 外力と応力

を考慮して、以下、平面と呼ぶ) が x, y 方向と平行な要素 A を考え、 x, y 方向と直交する平面をそれぞれ a, b と呼ぶ。 a 平面上で b 平面 (y 軸) 方向に作用するせん断応力を τ_{xy} と書く。同様に b 平面に垂直で a 平面 (x 軸) 方向のせん断応力は τ_{yx} である。このようにしたとき、せん断応力が向いている方向が x, y 座標正方向のせん断応力を正、逆向きのせん断応力を負とする。図-3-3の要素 A に作用するせん断応力の正負は図に示すとおりである。

なお、図-3-3には x 軸と直交する a 平面上の正の垂直応力 σ_x 、 y 軸と直交する b 平面上の正の垂直応力 σ_y をあわせて示してある。

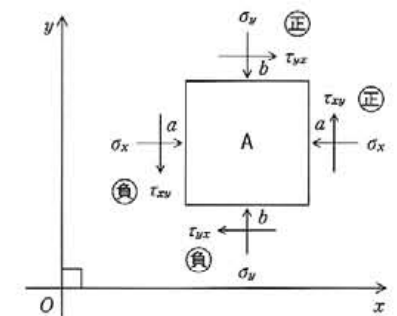


図-3-3 せん断応力の正負と正の垂直応力

3-3 土の有効応力の考え方

前章に示したように、本章からは、特に断らない限り、土粒子骨格の間隙が水で満たされた飽和土の力学について考えることとする。土は有限な大きさをもつ土粒子の集合体なので、個々の固体土粒子の性質と、その集合体である土全体の性質は異なる。土全体のように物体の性質が連続的に変化する、微小な領域において平均的な概念をもち込めるように仮想された物体を連続体と呼ぶことは3-1で説明した。土粒子の骨格や間隙水の挙動を連続体としてとらえ、土という材料の応力を定義して用いると便利であるが、混合体としての土の特徴を反映するために土の垂直応力を土粒子の骨格部分が受け持つ有効応力と、間隙水が受け持つ応力を区別して考える必要がある。土の有効応力は多数の土粒子の骨格部分が受け持つ粒子間力の平均値として定義される。実は、土の変形や強度を支配するのは土粒子の骨格部分が受け持つ有効応力であり、このことを基本に考えると土質力学に関する問題点の理解が容易になる。

3-3-1 土の全応力、有効応力と間隙水圧

地盤内に存在する土の要素に外力による垂直応力が加わったときには、その要素の内部においても力のつり合い式が成立する必要がある。たとえば、間隙水を水で満たされた飽和土を簡単に図-3-4に示すような飽和した n 個の2次元円形断面土粒子モデル $c_1, c_2, c_3, \dots, c_n$

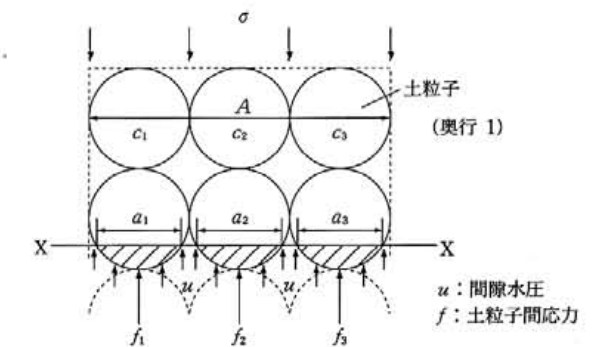


図-3-4 土粒子間に作用する力

3-4 地盤内の応力

水平地盤内の応力と変形状態の解析に必要な場の方程式は、運動量保存則である力のつり合い式および連続条件式である。ただし、力のつり合いに関する応力の9成分は、次のとおりである。

x 軸に直交する平面上の応力： $\sigma'_x, \tau_{xy}, \tau_{xz}$

y 軸に直交する平面上の応力： $\sigma'_y, \tau_{yz}, \tau_{yx}$

z 軸に直交する平面上の応力： $\sigma'_z, \tau_{zx}, \tau_{zy}$

また、1次元、2次元および3次元状態の地盤内の応力による力のつり合い式は次のようになる。

土質力学において1次元で仮定できる力学場として静止土圧状態がある。静止土圧状態とは図-3-8に示すように側方（水平： x 軸方向）方向に変位が生じない静止

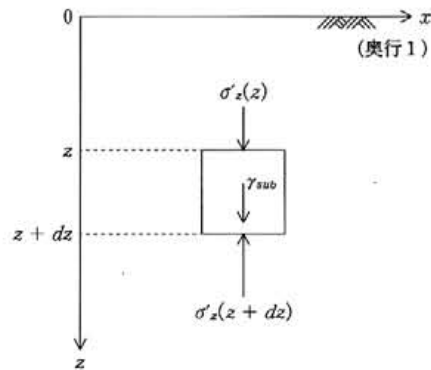


図-3-8 1次元状態の応力

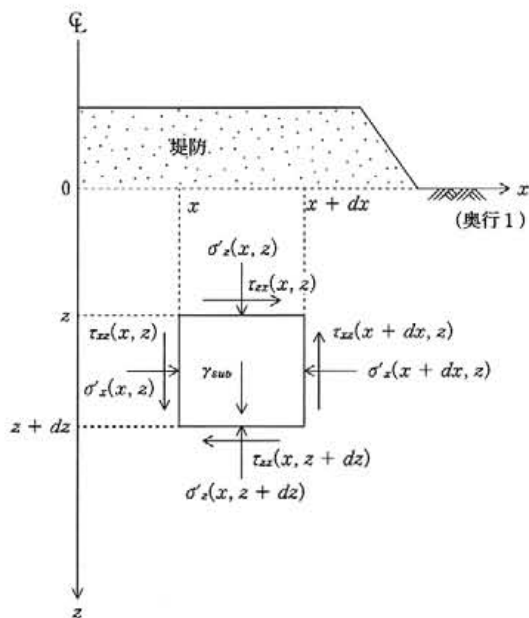


図-3-9 2次元状態の応力

状態である。地表面が平らな地盤や広い範囲で鉛直方向に等しい変形を受ける地盤では、地中の土は静止土圧状態にあると考える。このような状態では、土には鉛直方向垂直応力（鉛直土圧） σ'_v と鉛直土圧に比例した水平方向の垂直応力 $\sigma'_x = \sigma'_v$ のみが作用していて、せん断応力は作用しない。

$$\sigma'_x = K_0 \cdot \sigma'_z \quad (3-8)$$

この比例定数 K_0 は静止土圧係数と呼ばれる。このとき、要素の上面と下面の断面積を A とすると、要素に作用する z 方向の力のつり合い式は、

$$A\sigma'_z(z) + \gamma_{sub}Adz = A\sigma'_z(z + dz) \quad (3-9)$$

であるから、

$$\frac{\sigma'_z(z + dz) - \sigma'_z(z)}{dz} = \gamma_{sub} \quad (3-10)$$

$dz \rightarrow 0$ とすると、

$$\frac{d\sigma'_z(z)}{dz} = \gamma_{sub} \quad (3-11)$$

$$\therefore \sigma'_z(z) = \gamma_{sub} \cdot z + C$$

地表面に圧力が作用していなければ積分定数 $C = 0$ なので、

$$\sigma'_z(z) = \gamma_{sub} \cdot z \quad (3-12)$$

になる。

ここに、 γ_{sub} ：土の水中単位体積重量である。

次に、図-3-9に示す堤防のように地盤に十分に奥行のある外力を作用させた場合には、奥行方向には土は変形しないので2次元状態を仮定することができる。

このとき、2次元状態における応力による力のつり合い式は、

$$\begin{aligned} x \text{ 方向: } & \sigma'_x(x, z) \cdot dz + \tau_{xz}(x, z) \cdot dx \\ & = \sigma'_x(x + dx, z) \cdot dz + \tau_{xz}(x, z + dz) \cdot dx \end{aligned} \quad (3-13)$$

$$\begin{aligned} z \text{ 方向: } & \sigma'_z(x, z) \cdot dx + \tau_{xz}(x, z) \cdot dz + \gamma_{sub} \cdot dx \cdot dz \\ & = \sigma'_z(x, z + dz) \cdot dx + \tau_{xz}(x + dx, z) \cdot dz \end{aligned} \quad (3-14)$$

であるから、

$$\begin{aligned} & \frac{\sigma'_x(x + dx, z) - \sigma'_x(x, z)}{dx} \\ & + \frac{\tau_{xz}(x, z + dz) - \tau_{xz}(x, z)}{dz} = 0 \end{aligned} \quad (3-15)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\tau_{xz}(x + dx, z) - \tau_{xz}(x, z)}{dx} \\ & + \frac{\sigma'_z(x, z + dz) - \sigma'_z(x, z)}{dz} = \gamma_{sub} \end{aligned} \quad (3-16)$$

$dx \rightarrow 0, dz \rightarrow 0$ とすると、

$$\frac{\partial \sigma'_z}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0 \quad (3-17)$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma'_z}{\partial z} = \gamma_{sub} \quad (3-18)$$

と書ける。

最も一般的な3次元状態における力のつり合い式は、同様に、

$$\frac{\partial \sigma'_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = 0 \quad (3-19)$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma'_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} = 0 \quad (3-20)$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma'_z}{\partial z} = \gamma_{sub} \quad (3-21)$$

3-5 任意の平面上の応力の求め方

図-3-10に示すように、2次元における水平面から θ の傾きをもつ平面（長さ1、奥行1）上の応力（ $\sigma'_\theta, \tau_\theta$ ）は、微小要素に作用する力のつり合い式を利用して次のように表すことができる。

$$\begin{aligned} x \text{ 方向: } & \sigma'_x \cdot \sin \theta + \tau_{xz} \cdot \cos \theta \\ & = \sigma'_\theta \cdot \sin \theta - \tau_\theta \cdot \cos \theta \end{aligned} \quad (3-25)$$

$$\begin{aligned} z \text{ 方向: } & \sigma'_x \cdot \cos \theta + \tau_{xz} \cdot \sin \theta \\ & = \sigma'_\theta \cdot \cos \theta + \tau_\theta \cdot \sin \theta \end{aligned} \quad (3-26)$$

式-3-25と式-3-26を $\sigma'_\theta, \tau_\theta$ について解くと、

$$\begin{aligned} \sigma'_\theta & = \frac{1}{2}(\sigma'_x + \sigma'_z) - \frac{1}{2}(\sigma'_x - \sigma'_z) \cos 2\theta \\ & + \tau_{xz} \sin 2\theta \end{aligned} \quad (3-27)$$

$$\tau_\theta = -\frac{\sigma'_x - \sigma'_z}{2} \sin 2\theta - \tau_{xz} \cos 2\theta \quad (3-28)$$

この二式から傾斜角 θ を消去すると、次式が得られる。

$$\left(\sigma'_\theta - \frac{\sigma'_x + \sigma'_z}{2} \right)^2 + \tau_\theta^2 = \left(\frac{\sigma'_x - \sigma'_z}{2} \right)^2 + \tau_{xz}^2 \quad (3-29)$$

この関係を図示すると図-3-11のようになる。図-3-10における水平面（ x 軸）方向から反時計回りに θ 回転した平面上の応力（ $\sigma'_\theta, \tau_\theta$ ）は、図-3-11の図上で水平面上の応力を表す点Bから反時計回りに 2θ 回転した点Aの応力として表されることがわかる。この円はモ

と書ける。

また、角運動量保存則に相当する図-3-9の要素に作用するせん断応力によるモーメントのつり合いを考える。

$$\begin{aligned} & (\tau_{xz}(x, z) \cdot dx + \tau_{xz}(x, z + dz) \cdot dx) \frac{dz}{2} \\ & = \{ \tau_{xz}(x, z) \cdot dz + \tau_{xz}(x + dx, z) \cdot dz \} \frac{dx}{2} \\ & \tau_{xz}(x, z) + \tau_{xz}(x, z + dz) \\ & = \tau_{xz}(x, z) + \tau_{xz}(x + dx, z) \end{aligned} \quad (3-22)$$

$dx, dz \rightarrow 0$ とすると、

$$\tau_{xz}(x, z) = \tau_{xz}(x, z) \quad (3-23)$$

となり、 τ_{xz} と τ_{zx} の大きさは等しくなる。

同様に、3次元状態においては

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \tau_{yz} = \tau_{zy}, \tau_{zx} = \tau_{xz} \quad (3-24)$$

となる。

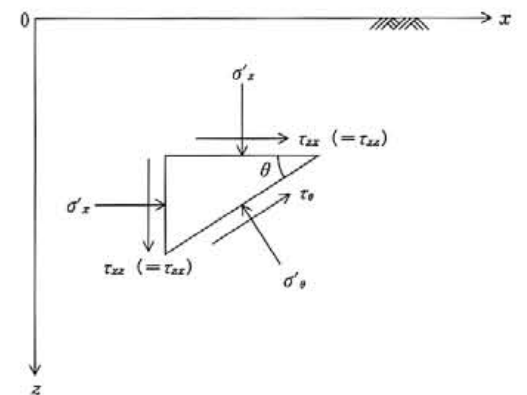


図-3-10 2次元における応力のつり合い

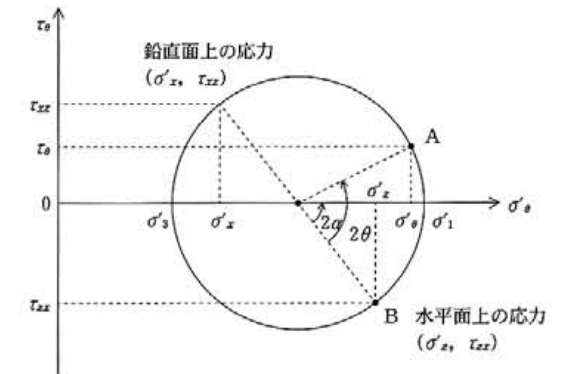


図-3-11 モールの応力円

ールの応力円と呼ばれる。なお、せん断応力の大きさの

6 せん断と圧密～土の限界状態モデル

6-1 土の限界状態モデル

実際の砂や粘土といった土の応力～ひずみ関係を求めるための材料試験方法として、最も広く使われている方法が三軸圧縮試験である。三軸圧縮試験が広く使われている主な理由は、次の二つである。

- ①三軸圧縮試験に用いる土のサンプル（供試体と呼ぶ）の形状が、円柱形の比較的準備しやすいものであること。
- ②土は固体と液体の混合体なので、体積変化、すなわち飽和土では排水の条件を厳密に規定する必要がある。三軸圧縮試験では、この排水条件の制御が比較的容易にできる。

三軸圧縮試験では、供試体の受ける応力とひずみの状態は、図-6-1に示すように円柱形供試体の中心軸を対称軸とする軸対称状態である。なお、供試体の上下端面と側面にはせん断応力が作用しないので、作用する垂直応力は主応力になる。この三軸圧縮試験において外力による主応力 σ_1 、 σ_3 のなす仕事の増分 dE は、

$$\begin{aligned}
 dE &= \sigma_1 \cdot d\epsilon_1 + 2\sigma_3 \cdot d\epsilon_3 \\
 &= \frac{1}{3}(3\sigma_1 \cdot d\epsilon_1 + 6\sigma_3 \cdot d\epsilon_3) \\
 &= \frac{1}{3}(\sigma_1 + 2\sigma_3)(d\epsilon_1 + 2d\epsilon_3) \\
 &\quad + (\sigma_1 - \sigma_3) \cdot \frac{2}{3} \cdot (d\epsilon_1 - d\epsilon_3) \\
 &= p' \cdot d\epsilon_v + q \cdot d\epsilon_s \tag{6-1}
 \end{aligned}$$

となる。

このように、軸対称状態にある供試体の外部仕事を定義するために応力とひずみのパラメータとして、以下の四つを用いると便利である。

$$\text{平均有効主応力} : p' = \frac{\sigma_1 + 2\sigma_3}{3} \tag{6-2}$$

$$\text{主応力差} : q = \sigma_1 - \sigma_3 \tag{6-3}$$

$$\text{体積ひずみ増分} : d\epsilon_v = d\epsilon_1 + 2d\epsilon_3 \tag{6-4}$$

$$\text{せん断ひずみ増分} : d\epsilon_s = \frac{2}{3}(d\epsilon_1 - d\epsilon_3) \tag{6-5}$$

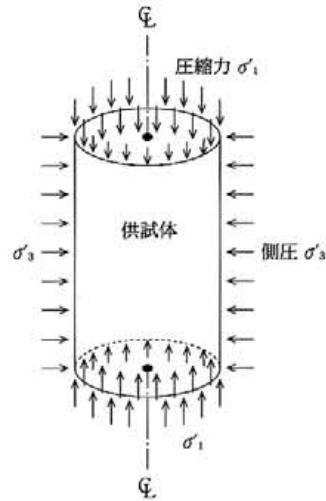


図-6-1 三軸圧縮試験の応力状態

土の三軸圧縮試験時の応力とひずみの関係を支配するのは、土の乾燥密度の大きさである。乾燥密度の大きい土は強度が大きく、逆に乾燥密度の小さい土の強度は小さくなる。砂の場合、三軸圧縮試験で得られる応力～ひずみ関係は、密な砂の場合はピーク強度が得られるが、ゆるい砂の場合は強度のピークが現れない（図-6-2参照）。三軸圧縮試験中には供試体の土粒子部分の質量、すなわち固体部分の体積変化はないので、乾燥密度の変化は供試体の空隙体積の変化を調べることによって知ることができる。このとき、密な砂の体積は最初わずかに減少した後は単調に増加するのに対して、ゆるい砂では体積が単調に減少する。また非排水状態で圧縮を行うと、密な砂では負の過剰空隙水圧が発生し、ゆるい砂では正の過剰空隙水圧が発生する。

一方、粘土の場合は、正規圧密粘土と過圧密粘土とで応力～ひずみ挙動が異なる。一般に、正規圧密粘土ではゆるい砂と同じ挙動が、また過圧密粘土では密な砂と同じ挙動が得られる。

しかし、図-6-2に示すように密な砂でもゆるい砂でも、またあるいは正規圧密粘土であっても過圧密粘土で

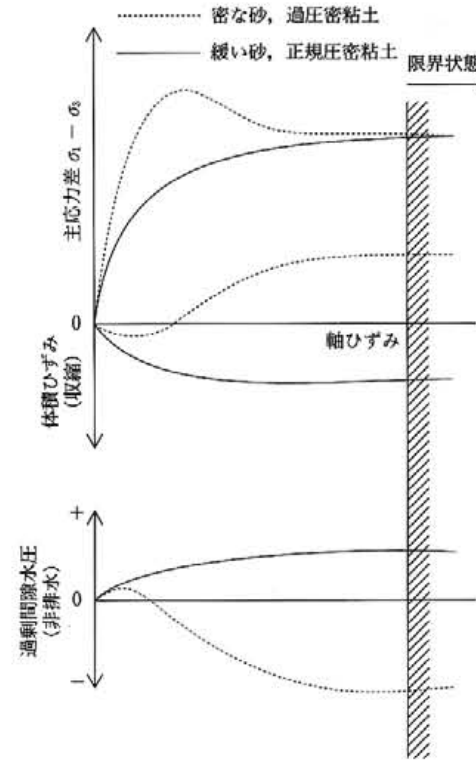


図-6-2 限界状態

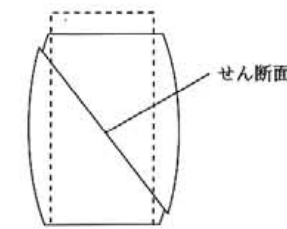


図-6-3 三軸供試体の破壊

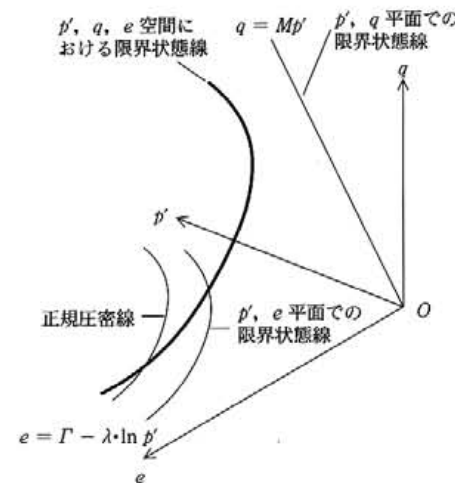


図-6-4 土の状態曲面

あっても、三軸圧縮試験を十分に大きなひずみが発生するまで継続していくと、応力および土の体積変化なしでせん断ひずみが增大する状態に到達する。この状態では、図-6-3に示すように三軸供試体にはすべり面が生じ、土は破壊状態に達していると考えられる。このような状態を限界状態（Critical state）と呼ぶ。

さて、三軸圧縮試験で土が塑性状態に到達したときの外部仕事が、すべて土粒子の摩擦による仕事で消費されたと仮定する。外力による塑性仕事 E^p は式-6-1を参考にして、

$$E^p = p' \cdot d\epsilon_v^p + q \cdot d\epsilon_s^p \tag{6-6}$$

土粒子の摩擦によって生じるせん断抵抗力は、3-3-2を参考にして垂直抗力に相当する平均有効主応力 p' に比例すると考えてよいから、摩擦で消費されるエネルギー E_s^p は、

$$E_s^p = M \cdot p' \cdot d\epsilon_s^p \tag{6-7}$$

である。式-6-6=式-6-7より、次式が成り立つ。

$$q = Mp' + p' \cdot \left(-\frac{d\epsilon_s^p}{d\epsilon_v^p} \right) \tag{6-8}$$

ここに、比例定数 M は限界状態パラメータ（Critical state parameter）と呼ばれる量であり、固体粒子間の摩擦係数に相当するものである。一般の土は $M = 1.0 \sim 1.5$ 程度の値を取る。

限界状態では、せん断ひずみ ϵ_s のみが増加し、体積ひずみ ϵ_v は変化しないので、式-6-8の右辺第2項のせん断による体積変化に相当するダイレイタンス成分 $\left(-\frac{d\epsilon_s^p}{d\epsilon_v^p} \right) = 0$ となり、次式が成り立つ。

$$q = M \cdot p' \tag{6-9}$$

また、このときの土の間隙比 e と p' の関係を実験的に調べてみると、次式が成立する。

$$e = \Gamma - \lambda \cdot \ln p' \tag{6-10}$$

ここに Γ と λ は土の種類や状態によって異なる土質定数である。

これら式-6-9、式-6-10で表される土の間隙比 e ～平均有効主応力 p' ～主応力差 q の3次元の空間で定義されるモデルが土の限界状態モデル（Critical state model）である（図-6-4）。この土の限界状態モデルを利用して、砂や粘土の排水、非排水条件下の限界状態における p' 、 q 、 e の値を推定することができる。

次に、限界状態モデルを利用して土の弾塑性体モデルの降伏関数 $f(p', q)$ を決定するために、式-3-72の塑