

新装版

数学トレーニング

伊藤 宏 著


The Mathematic Training 

彰国社

はしがき

私の家は鎌倉にある。鎌倉駅の裏口を出てまっすぐ行くと突当たりがテニスコート,そこで右に曲がりテニスコート(KINOKUNIYA)に沿って左に折れ,突き当たったら右に曲がり,さらに突き当たったら左に曲がり,最初の道を左に折れ,すぐ右に曲がってまっすぐ行くと左側にある。

“よし,わかった。右,左,右,左,左,右,だな。”

ということで,一晩,右左右左右と暗記して,さて翌朝鎌倉駅をおり,私の家までたどりつける人が何人あるだろう。

しかし,もし私がいっしょにお連れしてご案内したなら,二度目には小学生だっただまって私の家までたどりつくことができよう。

駅からわずか3分あまりのこの道程を間違いなく身につける最良の方法は,いちど実際に私が手をとってお連れすることなのだ。これがいちばん「わかりやすい」方法であり,身につく方法である。すなわち「強くなる」方法であるのだ。

本書は少なくとも数学を身につけようという意欲のある諸兄,また反対に数学を毛ぎらいする諸兄も含めて,一步一步,一問一問,著者ともども一緒に,実際に歩んでみようということである。そうすればおのずと“強くなり”,真に数学を自分のものとするきっかけをつかむことができると思う。

この本は一問一問,実際に自分でやってみていただきたい。たとえ高校の実力十分のかたでも,小学校用の問題から一步一步やっていただきたい。必ず得るところありと確信する。また小学校程度の

実力の方でも中級程度までの問題をやってみて、解答をよく読んでなっとくのゆくまで考え検討してほしい。それが数学的頭脳を養成する力となるのだ。そして中級までの問題を一通りやり終わったところで、また最初にもどり、こんどは上級用の問題と取り組んでいただきたい。こうやって繰り返すうちに自然と大学程度のものまで解く力を養うことができるはずである。

この本が数学について開眼する手助けとなることを期待してやまない。

1968年12月

著 者

目 次

はしがき

あなたの実力は？——11

出 題	11	採 点	19
解 答	13		

I 上手な計算、速い計算——23

5分間でできますか？	23	分数に直してみると	27
25^2 や 455^2 の速算	25		

すぐ利口になるおもしろい計算31

問 I -1(初級) $37 \times 3 = 111$ より31 問 I -3(上級) 指数を上手にを使って31

問 I -2(中級) $111^2 = 12321$ より31 問 I -4(上級) 1,234,567,89031

II 数は魔法か？ —魔法の数が数学を強くした話—34

○のあなうめ —頭のあなうめにもなります—39

問 II -1(初級) 三角形の上39 類題-1(中級)41

問 II -2(中級) 二つの円周上39 問 II -4(上級) 魔星陣41

問 II -3(中級) クイズではない、

高校入試に41

どんな数字で成り立つか —文字を数字に—45

問 II -5(初級) $BA + BB = ABC$ 45 問 II -8(中級) 金もっと送れ47

類題-2(初級)45 問 II -9(上級) $ONE + TWO + FOUR$

問 II -6(中級) 国大付中入試出題45 = SEVEN47

問 II -7(上級) たいへんな虫食い47

Ⅲ 集合と確率——49

現代数学の基本「集合」	49
問Ⅲ-1(初級) 宝さがし	53
問Ⅲ-2(初級) 帽子かぶって	53
類題-3(初級)	53
問Ⅲ-3(中級) $A \cap B$ (共通集合)	55
トバクから生まれた確率 一何に賭けたら有利か	59
問Ⅲ-6(初級) 野球の勝率	61
問Ⅲ-7(中級) 二つのサイコロ	61
問Ⅲ-4(中級) 2 題ともできた人は	55
類題-4(中級)	55
問Ⅲ-5(上級) 9 人の男のことも、	57
9 人の男のおとな	57
問Ⅲ-6(上級) 集合の要素	57
後がとくか	61

Ⅳ いろいろのきまりで並んだ数——65

数列のきまりを見つけよう	65
問Ⅳ-1(初級) $\square$ に数を	67
問Ⅳ-2(中級) 中学入試問題	67
問Ⅳ-3(上級) 数列の和	69
数字の並べ方、整理の仕方	73
問Ⅳ-6(初級) 講堂の長いすの番号	73
問Ⅳ-7(中級) 四角に並んだ数字-1	73
問Ⅳ-4(上級) 行っては帰り、	69
行っては帰り	69
問Ⅳ-5(中級) 直線の数、交点の数	69
問Ⅳ-8(上級) 四角に並んだ数字-2	75
問Ⅳ-9(上級) 四角に並んだ数字-3	75

V いくつあるか、いく通りあるか — 順列と組合せ — 77

図形の数はいくつ	79
問Ⅴ-1(初級) 二等辺三角形はいくつ	79
問Ⅴ-2(中級) 星形の中の	79
二等辺三角形	79
問Ⅴ-3(上級) 三重大入試問題	79
問Ⅴ-4(上級) ピラミッドの	83
三角形の数	83
問Ⅴ-5(初級) 正方形の数	83
問Ⅴ-6(上級) 平行四辺形の数	83
類題-5(上級)	86

いく通りの順路があるか	87
問Ⅴ-7(初級) 学校から家までの路	87
問Ⅴ-8(中級) 太郎の家から	87
次郎の家へ	87
問Ⅴ-9(上級) たて4本、よこ5本の道	89
問Ⅴ-10(上級) 複雑な順路	89
順路の問題のよくわからない方へ—すばり答が出ます—	93

Ⅵ さて、角は何度でしょう——96

頭をよくする角の問題	96
問Ⅵ-1(初級) 正方形と円周とで	97
問Ⅵ-2(初級) $\bigcirc \bigcirc$ と $\times \times$ とで	97
問Ⅵ-3(中級) 平行線の間の角	97
問Ⅵ-4(上級) 直角二等辺三角形	99
問Ⅵ-5(上級) 頭のよさの見せ所	99

Ⅶ 三平方の定理と応用——102

5, 4, 3の直角三角形の応用	107
問Ⅶ-1(中級) 円すい	107
折り紙のいろいろ	107
問Ⅶ-2(中級) 折って重なったところ	107
問Ⅶ-3(上級) 折ったところの長さ	109
問Ⅶ-4(上級) 正方形、正方形と折ったら	109
類題-7(上級)	112

Ⅷ 台形の辺と面積——113

高さがわからない台形の面積	115
問Ⅷ-1(初級) 上底、下底の長さで	115
問Ⅷ-2(初級) 底角 45° がくせもの	115
問Ⅷ-3(中級) 30° でうまくいく	115
類題-8(上級)	120
一橋大の入試から流行した台形の比と面積	121
問Ⅷ-6(中級) 上底と下底の比	121
問Ⅷ-7(中級) 国立高専入試問題	121
問Ⅷ-8(上級) かつて一橋大に	123
問Ⅷ-9(上級) 三角すい台へ応用	123
問Ⅷ-4(中級) 四辺はあたえてあるが	117
問Ⅷ-5(上級) 対角線の長さは	117

IX 数のあれこれ——125

分 数	127
問IX-1(初級) 2,3,5,7,11で分数を	127
問IX-2(中級) 分母, 分子の差が	
わかって	127
数字の順をさかさにしたら	133
問IX-4(中級) 2けたの整数	133
問IX-5(上級) 3けたの整数	133
問IX-6(上級) 大学入試問題	133
倍数と約数の応用	137
問IX-8(初級) 500円で何個買えるか	137
問IX-9(中級) 何列に並んでも	139
1人余る	137
問IX-10(上級) 各箱の単価を	
安くして	137

X 比例でも方程式でも解ける——140

かけっこ競争	141
問X-1(初級) 100m競争-1	141
問X-2(中級) うさぎと犬-1	141
1時間でどれだけ	145
問X-5(初級) プールと水道の水	145
問X-6(中級) 3台のストーブと石油	145
類題-10(中級)	145
問X-7(初級) 片道の長さ	147
進む時計	151
問X-10(初級) 翌朝には	151
問X-3(中級) 100m競争-2	141
問X-4(上級) うさぎと犬-2	141
問X-8(中級) 受付と行列	147
問X-9(上級) タンクの水とポンプ	147
類題-11(中級)	150
問X-11(中級) 柱時計と置時計	151

原価と定価	153
問X-12(初級) 定価の2割5分	153
問X-13(中級) もうかったかしら	153
類題-12(初級)	153
類題-13(中級)	153

XI いろいろな面積について——155

縮 尺	157
問XI-1(初級) 5万分の1の	
地図上の長さ	157
問XI-2(中級) 5万分の1の	
地図上の面積	157
全体の何分のいくつ——直感では当たりません——	159
問XI-3(初級) うまく区分してみて	159
問XI-4(初級) 正方形の何分のいくつ	159
問XI-5(中級) 正方形を折って	161
切りました	161
面積の分け方	165
問XI-8(初級) 正方形を1:3に	165
問XI-9(中級) 台形を1:3に	165
問XI-10(初級) テープを折って	167
問XI-11(中級) まがった境を	
まっすぐに	167
問XI-12(上級) 直線で境界を	
4:1に	167
引くには	169
グラフと面積——方眼紙を使ってみると——	171
問XI-13(初級) 方眼紙の上の	
三角形	171
問XI-14(中級) 座標と面積	171
類題-14(上級)	173

XII 曲線でかこまれた図形——175

弧などのかこむ周と面積	181
問XII-1(初級) 正方形内の円周	181
問XII-2(中級) 四つの円周で	
かこまれて	181
問XII-3(中級) 困った問題の解決	183
類題-15(中級)	183
問XII-4(上級) 曲線アステロイド	187
問XII-5(上級) $S = \int_a^b f(x) dx$	187

電子計算機と二進法	189
問XIII-1(中級) 国大付中の入試から ...	189
統 計	192
問XIII-2(初級) テストの平均点	192
問XIII-4(上級) 電車の待ち時間	197
問XIII-3(中級) 平均値から 相関表まで	193
類題解答	199
おわりに — 一緒に歩んだ諸兄に —	207

Column

古代の数字	21
あなたの書いた数をあてます	33
検算をする法(九去法)	52
17世紀フランスの数学者(解析幾何のデカルト, 確率のパスカル)	63
おじいさんと私の年齢が同じ? そんなことがありますか	72
面積の単位	82
メートル法について	106
あなたのお金が, 何年後に2倍になるか	130
“うっかりまちがえる”ということ	132
等しい≠同じ	144
三角関数(三角比)	150
区分求積と定積分	156
微分積分学とニュートン	164
“素数の簡単な見分け方”が今日まだ知られていない	170
円周率の歴史	178
不可能なこと	181
ギリシャ文字の名称と発音	186
二進法応用の数あて	198

あなたの実力は?

ここに10題の問題を出してみた。一題一題自分で解いていただきたい。問題のあとの余白に答を書いておいて, 全部終わったらあとの解答を見て採点していただきたい。制限時間は30分である。時間は正確に守っていただかないと, 評価の際の意味がうすれてしまう。

さてこれが10問全部できたら大学程度の実力ありと断定したい。そんなことが簡単に言えるかとお叱りをうけるすじもあろうかと思う。しかし私の実験的データや, 過去の経験的なことから, 10問全部正解できれば大学程度の能力ありと評価して差しつかえないと思う。

逆に言えば大学卒の方で制限時間内に全部正解を出せる方は10人に7人程度しかいないというデータが出ている。また小学生がすらすらと解けた問題を, 高校生あたりができなかったという例も多い。まずはさておき, ご自分で実際にやってみていただきたい。

出 題

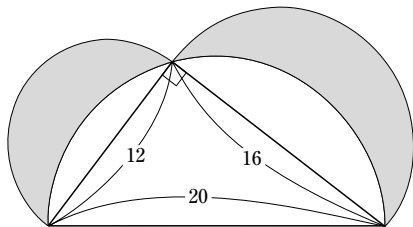
 **問1** 35人の生徒が運動場で身長順に1列に並んで番号をつけました。

- (イ) 中央の生徒の番号はいくつですか。
 (ロ) つぎにはじめから10人が教室に入りました。すると残ったのは11番から35番までの25人です。この残った生徒のうちで中央にいる生徒の番号はいくつですか。

 **答** (イ) _____
 (ロ) _____

練習

図のように直角三角形の各辺の上に半円を書いたときあみ目の部分の面積が直角三角形の面積と等しいことをたしかめよ。



3.14をかけてしまわずに、計算を上手にやってください。

解 あみ目の部分の面積は、

$$\begin{aligned} & (6 \times 6 \times 3.14 \div 2) + (8 \times 8 \times 3.14 \div 2) + (12 \times 16 \div 2) \\ & - (10 \times 10 \times 3.14 \div 2) \\ & = (6 \times 6 + 8 \times 8 - 10 \times 10) \times 3.14 \div 2 + 12 \times 16 \div 2 \\ & = 12 \times 16 \div 2 \\ & = \text{直角三角形の面積} \end{aligned}$$

$$\textcircled{10} \quad \frac{\overset{3}{27} \times \overset{3}{27} \times \overset{3}{27}}{\underset{1}{9} \times \underset{1}{9} \times \underset{1}{9}} = 3 \times 3 \times 3 = 27$$

このような計算は、この式を頭の中で書いて、答をすぐ出すようになってください。

(注) これは“ヒポクラテスの月”といってギリシャの数学者ヒポクラテスによって証明されている。

すぐ利口になるおもしろい計算

問I-1 $37 \times 3 = 111$ より (初級)

$$37 \times 3 = 111$$

$$37 \times 6 = 222$$

です。この計算を利用して、次の計算を暗算ですぐ答を出してください。

$$37 \times 18 =$$

$$37 \times 27 =$$

問I-2 $111^2 = 12321$ より (中級)

$(12345679 \times 9)^2$ はいくつになりますか。

コーチ

1, 2, 3, ……9, あれ! 8がぬけている。

書き忘れたわけではありません。この計算ちょっとうまく頭を働かせると暗算ですらすらとできるのですが……

問I-3 指数を上手に使って (上級)

100^{20} と 9000^{10} とはどちらが大きいかな。(大学入試問題)

コーチ

このまま計算したのではとてもたいへんです。

指数の法則を活用してください。

問I-4 1,234,567,890 (上級)

ある5けたの数を二つかけると、その答が1,234,567,890となります。もとの二つの数を求めなさい。

コーチ

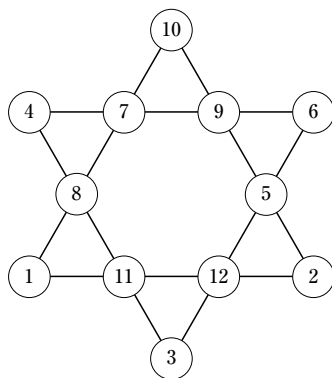
1,234,567,890を素数分解すること。

になる。

$$(78 - 52) \div 2 = 13$$

したがって、大きい三角形の三つの頂点の和は、13である。たとえば11, 12が頂点の一つを占めると、和は13以上となり不適当なことがわかる。10を入れると他の二つの頂点は1と2である。あとは順次求められて下の図のようになる。

このような形は魔星陣といわれている。



どんな数字で成り立つか — 文字を数字に —



問Ⅱ-5

BA + BB = ABC (初級)

$$\begin{array}{r} BA \\ + BB \\ \hline ABC \end{array}$$

A, B, C 三つの文字を使った計算があります。この三つのそれぞれ 0 ~ 9 までのある一つの数を表わしています。どんな数が適していますか。

$$A = \quad B = \quad C =$$



類題-2

▶ 解答は199ページ (初級)

$$A \times B = C$$

A, B, C は、それぞれ 0 から 9 までのある一つの数を表わしています。どんな数が適していますか？

$$A + A = B$$

$$C - B = B$$

$$A = \quad B = \quad C =$$



問Ⅱ-6

国大付中入試出題 (中級)

$$\begin{array}{r} DC \\ ABC \overline{) DE DC} \\ \underline{DAB} \\ CDC \\ \underline{CDC} \\ 0 \end{array}$$

A から E まで 5 種の文字を使った計算があります。この文字はそれぞれ 0 ~ 9 までのある一つの数を表わしています (同じ文字は同じ数を表わしている)。

A から E までそれぞれどんな数が適しますか。

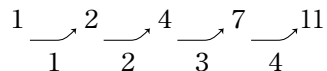
$$A = \quad B = \quad C = \quad D = \quad E =$$

(国大付中入試)

💡 解答Ⅳ-1

① 10 (5ずつふえている)

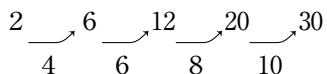
② 7 (1, 2, 3, 4とふえる)



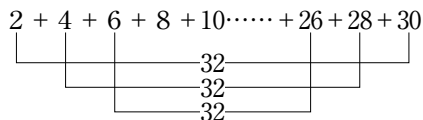
③ 20

$$1 \times 2, 2 \times 3, 3 \times 4, 4 \times 5, 5 \times 6$$

または



④ 240



$$32 \times 7 + 16 = 240$$

または

$$\frac{15}{2} \times (30 + 2) = 240$$

💡 解答Ⅳ-2

① $(13)^2 = (169)$

② $(2^9) - 1 = 511$

📎 問Ⅳ-3 数列の和 (上級)

次の数列の第10項を求め、またははじめの10項までの和を求めよ。

① $-50 + 100 - 200 + 400 - \dots$

② $1 + 1\frac{2}{3} + 2\frac{1}{3} + 3 + 3\frac{2}{3} + \dots$

📎 問Ⅳ-4 行っては帰り、行っては帰り (上級)

東西に走る直線コース上で1定点Oから東方に10m間隔に1本ずつの旗を立ててある。Oから10imにある旗を第*i*号とする。一度に1本ずつの旗を選ぶものとして、Oにいる人が最短通路をへて、この旗全部をOに集めるときこの人は何m歩くか？

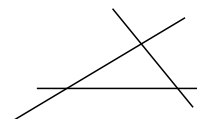
($i = 1, 2, \dots, 20$ である)

📎 問Ⅳ-5 直線の数、交点の数 (中級)

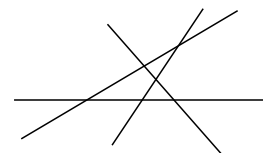
一つの平面上に、いく本かの直線を、どの2本も平行でなく、どの3本も同じ点を通らないように引くと下の表のようになる。

直線の数	1	2	3	4	5	6	7
交点の数	0	1	3				
平面の部分の数	2	4	7				

表のあいているらんに入数を入れ、また*n*本の直線のときを考えよ。



直線3本



直線4本

VI さて、角は何度でしょう

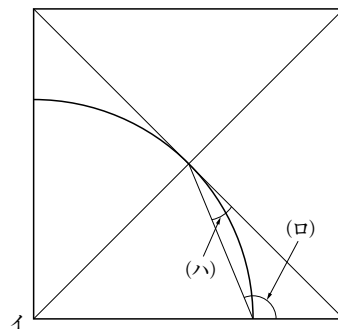
頭をよくする角の問題

角の問題はおもしろい。三角形の内角の和，平行線による角の移動，あれこれひねくってみても結局どうどうめぐりをしていてさっぱり答が出なかったり，ちょっとしたひらめきで，いとも簡単に答が出たりする。一本の線のひき方が大きな解決のかぎとなることも多い。角の問題はあれこれ考えをめぐらして，じっくり取り組んで欲しい。時間のたつのを忘れるくらいでよい。そうすれば自然と頭の働きもよくなるし，あらゆる基本定理もよみがえってくる。角の問題は頭をよくする。数学に強くなるワンステップでもある。

また角を単に紙上の平面図形の上だけでなく，もっといろいろな身のまわりのことから考えてみるのもおもしろい。角の概念を2直線の開きとして静的なものと考えただけでなく，もっと動的な意味で，時計の針の回転と時間との関係から角を回転した量として考えることもある。また弾丸の発射する角度と飛ぶ距離の関係や，斜面の角度と力の分解，分力，三角測量などいろいろと角を扱うことは発展していく。

そこで角度の大きさについての目測や直観力を養うことも大切である。普通二種類の三角定木が使われているが，その一つは内角が 45° ， 45° ， 90° の直角二等辺三角形で，もう一つが 30° ， 60° ， 90° の三角形であることはご存知の通り。刃物の刃の角度は，安全かみそり 5° ，うす刃ほう丁 15° ，出刃ほう丁 20° ，のみ 41° ，おの 45° などはいかが。

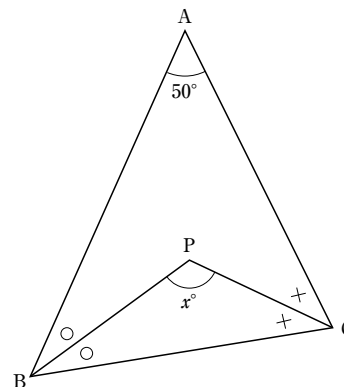
問VI-1 正方形と円周とで (初級)



図のように，正方形と(I)を中心とした $\frac{1}{4}$ の円周とがあります。

(ロ)の角と(ハ)の角は何度ですか。

問VI-2 ○○と××とで (初級)



三角形ABCの $\angle A$ が 50° です。

$\angle B$ と $\angle C$ の二等分線をひき，その交点をPとすると $\angle BPC$ (x°)は何度ですか。

問VI-3 平行線間の角

(中級)

l と m は平行です。図のような角 x を求めなさい。

