くわしすぎる

構造力学演習

I

M・Q・N図

編

彰国社

岡田 章 ＋ 宮里直也

くわしすぎる

構造力学演習

I

M･Q･N図

編

岡田 章 ＋ 宮里直也

彰国社

はじめに

　美しくて安全な建築物の構造を考えることは、時間を忘れるほど楽しい、創造的な活動です。この構造デザインに携わるためには、構造力学の基礎知識とそれを通じて得られる感覚が必須となります。

　ところが、構造力学に苦手意識を持つ人が少なくありません。構造力学の修得には、高校の物理や数字の知識は、ほとんど不要であるにもかかわらず、不思議なことです。大学で構造力学を教えていると、学生が構造力学から離れていく瞬間を感じることがあります。学生のつまずきの時期や理由は様々ですが、共通しているのは、理屈は理解していても、いざ演習問題に向かうと解けなくなる、あるいは意欲的に解こうとしない、ということが挙げられます。

　これが本シリーズを書くに至った理由です。本文は、構造力学の理論的な解説をできるだけ省略し、問題を解くことを通じて、構造力学の楽しさを味わいながら自然と理論が身に付くことを目的としています。そのため、問題を解く手順を最初に提示し、この定められた手順に従って＜基本問題＞を解く、といった構成となっています。基本問題は一級建築士レベルのものを選んであります。ぜひ、一級建築士レベルの問題がいかに簡単に解けるか、を味わってください。

　具体的にいうと、章の冒頭で解法の手順をまとめたものが＜Method＞、手順の肝を述べたのが＜Point＞です。そのあとに続く＜check＞（例題）は Point の理解度を確認するために設けてあります。

　＜information＞は Point で紹介したことを有効に使うための背景や、基本問題を解くための公式など、知っておいてほしい内容をまとめたもので、必読事項です。＜Memo＞は、重要項目を改めて短くまとめたものです。この他、基本問題には＜Navi＞も設け、着眼点をまとめてあります。

　＜Supplement＞には、理論的な背景や理解を深めるための補足をまとめてあります。余裕があれば読むことをお薦めします。各章末の＜challenges＞は一級建築士レベルを超えた問題で、応用問題と捉えていただいて結構です。

　本シリーズを通じて構造力学のおもしろさに気づく人が少しでも増えることが著者たちの望みです。明日を担う構造エンジニアの誕生の一助になれば幸いです。

[目次]

［デザイン］ 榮元正博

1章

反力を求める

反力を求める

「反力」とは……

構造物に加わる力（外力）に抵抗するために、構造物を支えている点（支点）に生ずる力のこと。

基礎知識

◉外力と反力は釣り合っていなければならない。

→「釣合条件」を用いて反力は求まる。

→反力を求めるためには架構の形は関係がない。外力・支点の種類と位置により定まる。

◉「釣り合う」ための2条件：「移動しないこと」かつ「回転しないこと」。

◉反力を求めるには「数式解法」と「図解法」の2つの方法がある。

method

【数式解法】

ここでは「数値解法」の手順を示す。

「図解法」は基本問題中のInformationで紹介する。（→P. 16、18、20）

❶ 反力の方向を仮定する。 ……………… Point 1

❷ それぞれの反力に対して釣合方程式を立てる。 ……………… Point 2

❸ 釣合方程式を解いて反力を求める。 ……………… Point 3

【数式解法の手順】

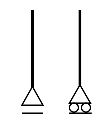
Point 1 反力の方向の仮定

支持点（支点）の種類に応じて反力の方向を仮定する（方向は任意である）。

支点は、構造物が安全であるためと、その部分の移動や回転が生じないように拘束している。反力は、拘束していることにより生じている。主な支点には、以下の3種類がある。

①「ローラー」………移動端（Roller End）

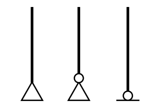
支持面（レールをイメージすればよい）に沿って自由に滑るように移動し、さらに回転も可能な支点。反力はレールと直交する方向にしか生じない。モデル図は回転可能な三角形（△）とレールを表す直線（—）を組み合わせて表す。この他、△とレールの間に車輪をイメージした○を2つ加える表現もある。



ローラーの表示いろいろ。

②「ピン」………回転端（Pinned End、Hinged End）

どの方向にも移動できないが、回転は自由にできる支点。この支点の反力は回転軸の中心を通る力であり、解きやすいように、2方向の力に分解して、直交する2つの力で表す。モデル図は頂点で回転可能な三角形（△）で表わす。

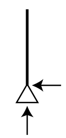
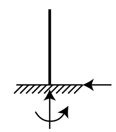


ピンの表示いろいろ。

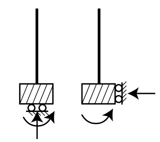
③「固定端」（Fixed End）

移動も回転もできない支点で、反力はピンと同様の2方向の力と、回転の拘束力としてモーメント力が生じる。モデル図は1本の棒を地面に突きさしたイメージで表わす。

主な支点のモデル図と反力

名称	ローラー	ピン	固定
モデル図			
反力数	1	2	3

←左の代表的な支点以外にもいろいろ考えられる。例えば、回転と鉛直方向の移動を拘束した支点などもある。



Point 2 釣合条件式

「移動しない」、「回転しない」という釣合いの条件を数式で表したものが、釣合条件式（釣合方程式）である。式への変換を以下に示す。

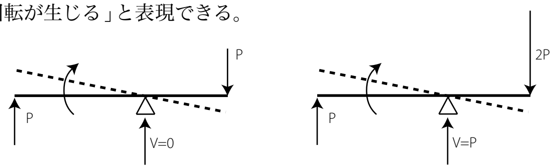
- 釣り合う
  - 移動しない
    - 水平方向 ▶▶▶（水平方向の力の和）=0
    - 鉛直方向 ▶▶▶（鉛直方向の力の和）=0
  - 回転しない ▶▶▶（ある点を中心にしたモーメントの和）=0

式で書くと、次のようになる。

$$
\begin{cases}
\sum X = 0 & \text{……（X方向の力の和）＝0} \\
\sum Y = 0 & \text{……（Y方向の力の和）＝0} \\
\sum_A M = 0 & \text{……（ある点Aを中心にしたモーメントの和）＝0}
\end{cases}
$$

←方程式が3つ立てられるため、未知数である反力が3個の場合、解くことができる。
→反力の数が4以上の場合、釣合条件だけで、反力を求めることはできない。

＊「回転」とは架構全体の回転を表わす。下の例では、水平方向と鉛直方向の力は釣り合っているが、回転が生じるのは理解できるであろう。力を用いて説明すると、「偶力（大きさが同じ、逆方向の平行な２つの力）により回転が生じる」と表現できる。



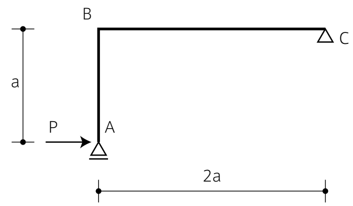
Point 3 反力を求める

釣合条件（手順②の連立方程式）を解くと反力が求まる。このとき得られた答えが（＋）、（－）によって反力の方向が次のようになる。

解が $\begin{Bmatrix}(+)\\(-)\end{Bmatrix}$ ⇨反力の方向が、①の仮定と $\begin{Bmatrix}\text{同じ方向}\\\text{逆　方向}\end{Bmatrix}$

←正確には3個の式が独立でないと解は得られない（P.11 Supplement Ⅱ　参照）。
$\Sigma X=0$、$\Sigma Y=0$、$\Sigma_A M=0$ の3つの連立方程式を立てると、独立した3つの式が立てられると考えてよい。

check 問題

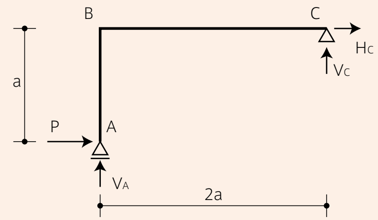


A点のローラーとC点のピンの反力を求めよ。

←ピン（△）とローラー（△）の2つの支点で支持されている時「単純支持」と呼ぶ。

check 解答

①反力の仮定：ローラーに1つ、ピンに2つの反力を仮定し、それぞれに名称を付ける。



←V、Hなどの反力の名称は自由に付けてよいが、ここでは次の法則に沿った。

V_A：A点に生じる鉛直方向の反力
V_C：C点に生じる鉛直方向の反力
H_C：C点に生じる水平方向の反力

＊VはVertical（鉛直方向）、HはHorizonal（水平方向）の略。

②釣合条件

$$
\begin{cases}
\sum X = \vec{P} + \vec{H_C} \equiv 0 \cdots\cdots\cdots\cdots(1) & \text{（水平方向）} \\
\sum Y = V_A(\uparrow) + V_C(\uparrow) \equiv 0 \cdots(2) & \text{（鉛直方向）} \\
\sum_C M = \overset{\curvearrowleft}{Pa} - \overset{\curvearrowright}{V_A(2a)} \equiv 0 \cdots\cdots(3) & \text{（C点中心のモーメント）}
\end{cases}
$$

←$\Sigma X=\vec{P}+\vec{H_C}$、$\Sigma X=0$ をまとめて、「≡」を用いて式（1）のように書いた（他の式も同じ）。

←V_C、H_Cは、C点に向う力のためC点を中心としたモーメントを生じさせない。

[式の立て方]

例えば、ΣX（水平方向の力の和）は、「（i）水平方向の力をすべて書く、（ii）それぞれの力に方向を矢印で表す、（iii）右方向の矢印を（＋）として、各力の前に（＋）（－）を付ける」という手順で求める。

←（ii）において、左方向を（＋）にしても結果は同じ。この場合、式（1）は $\Sigma X=-\vec{P}-\vec{H_C}\equiv 0$ となる。

同様に、$\Sigma_C M$（モーメントの力の和）は「(i)ある点（ここでは点C）を中心としたモーメント（回転）を考える、(ii)（各地からの大きさ）と（各力と(i)で定めた中心点との距離：各力の作用線と中心点との最短距離）を掛け合わせる、(iii)時

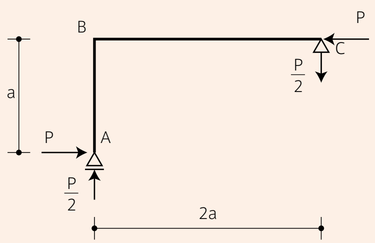
計方向あるいは反時計方向の回転を（+）と仮定し、その逆方向を（−）として、各回転力の前に（+）（−）を付ける」という手順で求める。前頁の例では反時計回りを（+）としているが、時計回りを（+）としてもよい。

③反力：②の連立方程式を解く。

- （1）式 → $H_C = -P\ (\leftarrow)$
- （2）式 → $V_C = -V_A$
- （3）式 → $V_A = \frac{P}{2}\ (\uparrow)$
- （2）式・（3）式 → $V_C = -\frac{P}{2}\ (\downarrow)$

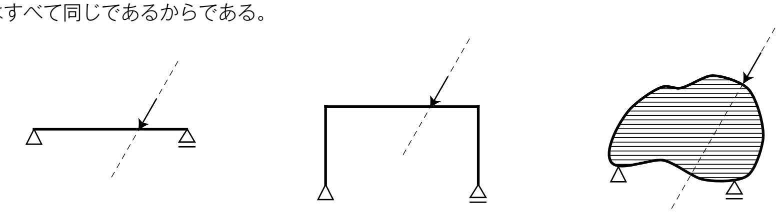
←H_cとV_cは、負（−）で求まったため、反力の方向は、仮定向と逆方向になる。こうして求めた正解の方向を解の後ろに（ ）付きで示しておくとよい。

得られた反力を図で示す。



Memo

「反力を求める」ことと「架構はどんな形をしているか」は無関係。外力と支点の種類と位置のみが関係する。
例えば下の図は、すべて反力は同じになる。外力の大きさと作用線の位置、反力の作用線の位置はすべて同じであるからである。



supplement Ⅰ

釣合条件の連立方程式は独立していなければならない。前記のcheck問題でA点あるいはB点を中心としたモーメントの釣合条件は以下のようになる。

$$\sum M_A = H_c a - V_c(2a) \equiv 0 \quad \cdots\cdots (4)$$

$$\sum M_B = Pa + V_c(2a) \equiv 0 \quad \cdots\cdots (5)$$

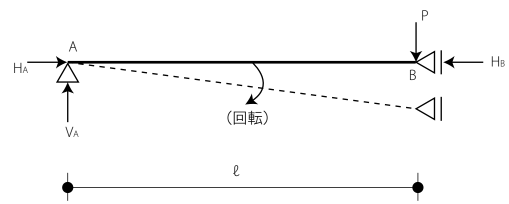
式（4）と式（5）の和は

$$H_c a + Pa = 0 \quad \therefore H_c + P = 0$$

となり、式（1）と同じになる。 つまり「式（1）、（4）、（5）の内、2つの式から残りの式が導ける」ということである。
いいかえれば、もし式（1）、（4）、（5）の連立方程式を立てても、解が求まらない場合、「式（1）、（4）、（5）は互いに独立していない」と表される。
これを避けるために、反力を求める際には、$\sum X=0$、$\sum Y=0$、$\sum_i M=0$の３つの連立方程式を立てればよい（$\sum_i M$はある点iを中心にしたモーメントの釣合い）。

supplement Ⅱ

反力が3つ存在しても、解が求まらないことがある。これは、架構が不安定な場合である。例えば、下のような架構を考える。



荷重が加わると部材ABは、A点を中心にして回転が生じるため、釣り合っていない。
この架構に対して釣合条件式を書くと以下のようになる。

$$\sum X = \overrightarrow{H_A} - \overleftarrow{H_B} \equiv 0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

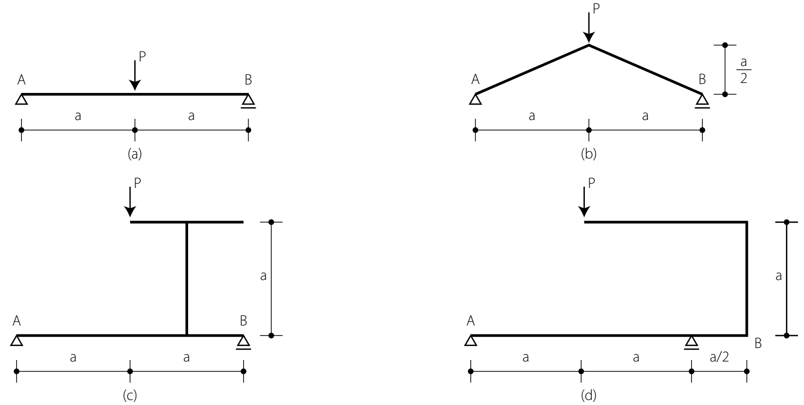
$$\sum Y = V_A(\uparrow) - P(\downarrow) \equiv 0 \quad \cdots\cdots (2)$$

$$\sum_A M = P\ell \equiv 0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

この内、式（3）は$\ell \neq 0$であるため成立しない（P=0以外成立しない）。
このように反力が3つあっても釣合条件が解けない場合がある。

基本問題 1　単純支持+集中荷重

次の単純支持された架構(a)～(d)の支点部A、Bにおける反力を求めよ。

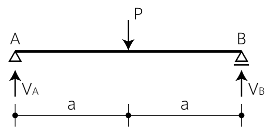


Navi

- ◉手順に従って解けば、簡単に求まる。
- ◉(a)～(d)の外力Pの作用線と支点A、Bの反力の作用線の関係はどうか、考えてみよう。
- ◉水平方向の釣合い(ΣX=0)より、A点の水平反力は明らかにゼロ。
- ◉ローラーとピンそれぞれ1つずつで支持されている場合、「単純支持」と呼ばれる。

【(a)の解答】

①反力の仮定



←Point 1

←A点の水平反力(H_A)は明らかにゼロのため、最初から仮定していない。

②釣合条件から反力を求める。

←Point 2、3

$$\begin{cases} \sum Y=V_A(\uparrow)+V_B(\uparrow)-P(\downarrow)\equiv 0 \quad \cdots\cdots (1) \\ \sum_A M=Pa-V_B(2a)\equiv 0 \quad \cdots\cdots (2) \end{cases}$$

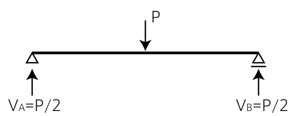
←ΣY=0と　$\Sigma Y=V_A+V_B-P$を合体させた式。

←$\Sigma_A M$は「A点を中心としたモーメントの釣合い」の意味。

(1)式 → $V_A=P-V_B$ → $V_A=\dfrac{P}{2}(\uparrow)$

(2)式 → $V_B=\dfrac{P}{2}(\uparrow)$ → ($V_A=P-V_B$へ)

③反力図



【(b)～(d)の解答】

外力Pの大きさと方向が同じで外力と反力の作用線の位置も同じであるため、結果は(a)と同じになる。

←重要。P.13の[Memo]参照。

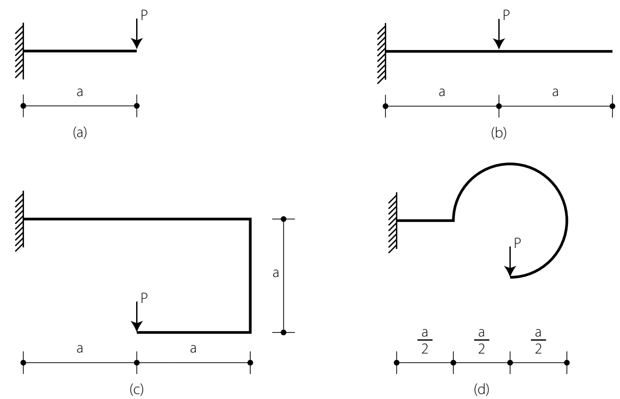
Memo

外力の大きさと方向、支持方法、外力と反力の作用線の関係などが等しい場合、反力(大きさ、方向、位置)は等しくなる。

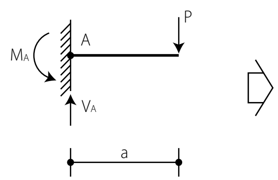
Example

次の架構の支点反力はすべて同じになる。

←・すべて固定端
・外力Pの大きさ：同じ
・Pと固定端の距離：同じ



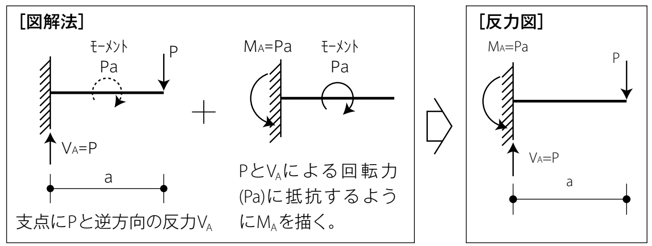
反力は以下のようになる(A点の水平反力は明らかにゼロ)。



$$\sum Y=V_A(\uparrow)-P(\downarrow)\equiv 0$$

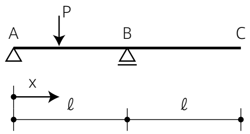
$$\sum_A M=M_A-Pa\equiv 0$$

$$\therefore V_A=P(\uparrow),\ M_A=Pa$$



←図解法については、P16［information］で解説。

基本問題 2　単純支持+集中荷重



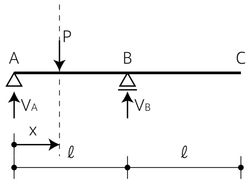
片持部分を持つ単純支持梁にA点から距離xの位置に集中荷重Pが加わっている。Pの位置がx=0からx=2ℓまで変化するとき、A、B点の鉛直反力V_A、V_Bとxの関係を求めよ。

Navi

●xの位置にPが加わった単純支持梁に対して、手順に従って反力を求めればよい。
●A点の水平反力は明らかにゼロ。
●横軸にx、縦軸にV_A、V_Bを取ったグラフを描いてみよう。

【解答】

①反力の仮定。　←Point 1



②釣合条件から反力を求める。　←Point 2、3

$$\sum Y = V_A(\uparrow) + V_B(\uparrow) - P(\downarrow) \equiv 0 \quad \cdots\cdots (1)$$

$$\sum_A M = Px - V_B\,\ell \equiv 0 \quad \cdots\cdots (2)$$

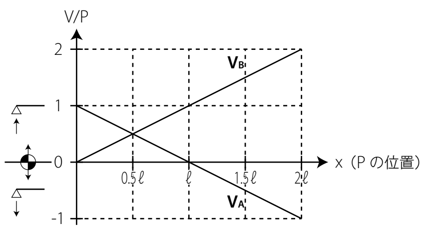
(1)式 → $V_A+V_B=P$ → $V_A=P\left(\frac{\ell-x}{\ell}\right)$

(2)式 → $V_B=P\left(\frac{x}{\ell}\right)$

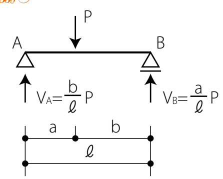
$$\therefore\ V_A=\frac{\ell-x}{\ell}P(\uparrow)、V_B=\frac{x}{\ell}P(\uparrow) \quad \cdots\cdots (3)$$

③xとV_A、V_Bの関係。

←[反力図]荷重Pの位置がB点より右にあると、V_Aは下向きとなる。



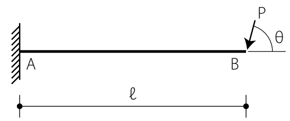
Memo



基本問題2で、
x=a、ℓ−x=bを代入すると
左の関係が得られる。

←重要な公式。

基本問題 3　片持支持+集中荷重



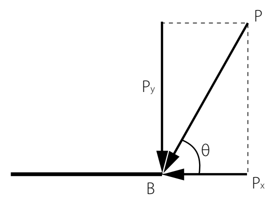
一端が固定端、他端が自由端の梁（片持支持梁）の先端に集中荷重Pが加わっているとき、固定端に生じる反力を求めよ。

Navi

●A点（固定端）に反力を仮定して手順に従って解く。
●荷重Pを水平方向と鉛直方向に分解して分力を求めたほうが容易に解ける。
●θが0～2π(180°)まで変化すると、反力がどのように変化するか考えてみよう。
●固定端1つで支持されている場合、「片持支持」と呼ばれる。

【解答】

①外力Pの分力。



Pの水平方向成分P_x、鉛直方向成分P_yを求める。

$$P_x=P\cos\theta、P_y=P\sin\theta \quad \cdots\cdots (1)$$

②反力の仮定。　←Point 1