

考える
プロセスが
わかる



変形を 理解する 構造力学

小野里憲一・西村彰敏 著

彰
国
社

考える
プロセスが
わかる

変形を 理解する 構造力学

小野里憲一・西村彰敏 著

彰
国
社

はじめに・本書の特徴

本書は、拙著『力のつり合いを理解する構造力学』（彰国社）の続編として書かれています。この本は本書のなかでは「姉妹本」として記されています。姉妹本では、力のつり合いの条件を理解して、静定構造物を解けるようになるところまでを目標としました。

構造力学において、次にマスターしたいのは、構造物に力が作用したときにどのように変形するのか？ということです。本書『変形を理解する構造力学』では、構造物の変形を理解し、「力のつりあい」だけでは解けない構造物を、変形を考慮することで解くことを目的にしています。もし、読み進める上で、力のつり合いについて、難しく感じられた場合は、姉妹本から読まれることをお勧めします。

微分や積分、三角関数などを使用することもあります。複雑な式の成り立ちは、考え方のプロセスを整理し、読者が混乱しないよう、下記のように知識を補足するようつとめています。

・具体的なイラストでイメージを助ける

構造力学は、実際に目で見て実感することが難しい学問ですが、なるべく具体的なイラストを入れ、変形のイメージを把握できるように工夫しました。

・式の展開プロセスを詳解

はじめから結論だけを示すのではなく、どうやって答えが導かれるのかの計算プロセスを大切にしています。数学が不得手な読者でも内容についていけるよう配慮しました。

・相互の式の関係を表示

式の数が増えても、どの式がどの現象を指しているのかわかるように、また、相互の式の関係性を章をまたいでもすぐに参照できるようコメントを入れています。

・吹き出しやメモで補足解説

学生からの疑問や理解のつまずきに答えられるよう、マンガのように吹き出しをつけて解説のコメントを入れました。メモはより理解を深めてほしい事項をまとめています。本文や図を見て理解できる方は読み飛ばしてかまいません。

・バリエーション豊かで本質的な問題

構造力学では、理屈を理解するだけでなく、実際に「解いてみる」ということが不可欠です。本書では例題を解くプロセスを「考え方」としてまとめていますが、ここを理解していただくことがとても重要です。「問題」には応用的な内容も含まれています。

授業では教科書の問題以外に、いろいろな課題や試験問題に取り組む機会があると思います。また、将来的にみなさんは建築士の試験にチャレンジするかもしれません。本書は、構造力学の基礎を理解するための基本にして重要な内容を扱っています。自分で考える力が身につけば、これから先どのような問題が出てきても怖くありません。本書で多くの学生さんが、構造力学に対する苦手意識を克服していただければ幸いです。

はじめに・本書の特徴 3

1 章 材料の性質

1.1 材料の性質 8

1 応力度 8

2 強さ 9

3 ひずみ度 10

4 応力度とひずみ度 12

5 ヤング係数 12

2 章 断面の性質

2.1 軸方向力による変形 18

1 断面積 18

2 断面積、ひずみ、軸方向力の関係 18

2.2 曲げモーメントによる変形 20

1 曲げ 20

2 たわみと断面2次モーメント 29

3 曲げの強さと断面係数 39

2.3 座屈 48

1 座屈とは 48

2 座屈荷重 48

3 座屈荷重の大きさ 49

4 支持条件と座屈長さ 52

5 座屈応力度 53

2.4 セン断力による変形 57

1 荷重、セン断力、曲げモーメントの関係 57

2 セン断応力度 58

3 セン断力による変形 61

2.5 ポアソン比と弾性係数 65

1 ポアソン比 65

2 ヤング係数とセン断弾性係数の関係 69

3 章 梁の変形を求める

3.1 構造物を解くための仮定と変形の概略 74

1 微小変形理論 74

2 変形の概略 76

3.2 弾性曲線方程式 83

1 弾性曲線方程式とは 83

2 拘束条件 83

3 たわみ角とたわみの計算 86

4 連続条件 91

5 弾性曲線方程式を用いて不静定梁を解く 96

6 対称条件 101

3.3 モールの定理 105

1 モールの定理とは 105

2 モールの定理で単純梁の変形を求める 105

3 モールの定理で片持ち梁の変形を求める 107

4 章 不静定構造物の解法

4.1 曲げモーメントからせん断力と軸方向力を求める 110

1 曲げモーメントから外力とせん断力を求める 110

2 荷重と曲げモーメントからせん断力と軸方向力を求める 114

4.2 節点移動しない構造物の解法 116

1 節点移動しない構造物 116

2 中間荷重が作用しない構造物を解く 118

3 中間荷重が作用する構造物を解く 120

4 固定モーメント法 123

4.3 節点移動する構造物の解法 134

1 片持ち梁の変形の組み合わせでたわみを求める 134

2 基本的な梁の組み合わせで構造物を解く 135

4.4 たわみ角法 142

1 たわみ角法の基本式 142

2 たわみ角法による解法 143

5 章 仕事

5.1 仕事 156

1 仕事とは 156

2 弾性体に対する仕事 157

3 相反作用の定理 158

4 外力仕事と内力仕事 161

5 カステリアーノの定理 164

5.2 仮想仕事の原理 169

1 仮想仕事の原理とは 169

2 仮想仕事の原理を用いて静定トラスのたわみを求める 173

3 仮想仕事の原理を用いて不静定梁を解く 177

4 仮想仕事の原理を用いて不静定ラーメンを解く 183

5 仮想仕事の原理を用いて不静定トラスを解く 185

問題の解答 190

付録 235

1 章 材料の性質

2.2 曲げモーメントによる変形

1 曲げ

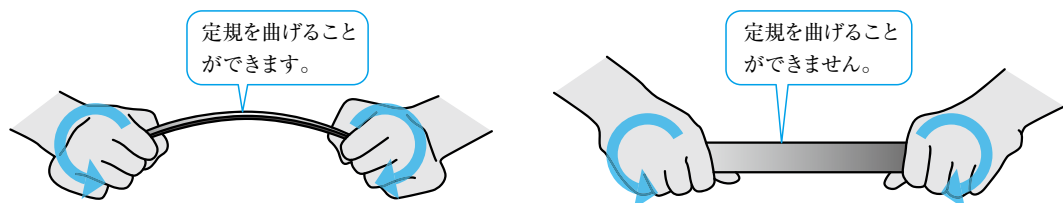
(1) 曲がる

曲がるという変形には、部材の断面の形状がどのように関係するのでしょうか。たとえば、曲がるという変形は断面積に関係ないことが簡単な実験でわかります。

次の「やってみよう」のように、定規を両手で持っていろいろな方向へ曲げてみてください。左図のように厚さ方向には簡単に曲げることができますが、右図のように持って縦方向に曲げようとしても曲げることができません。定規の断面積は曲げる方向で変わるわけではないので、このような違いを断面積で関連づけることはできません。左図のように曲げた場合と、右図のように曲げた場合を比較すると、右は左に比較して100倍ぐらいたくなります。2.2では、その理由について説明します。

やってみよう

定規を持って曲げてみましょう。曲げる方向によってかたさが違うことがわかります。



曲がるという変形がどのような状態であるか詳細に考えてみましょう。図2.2.1は、スポンジのようなやわらかい素材でできた棒を、曲げた状態だと考えてください。このとき、棒の中央付近は右図のように上側が伸びて下側が縮むように変形しています。棒に鉛直の平行線を引いて曲げると、右図のように平行線で囲われた四角形は扇形になります。すなわち、扇形の変形が連続して、曲がっているという状態になっています。

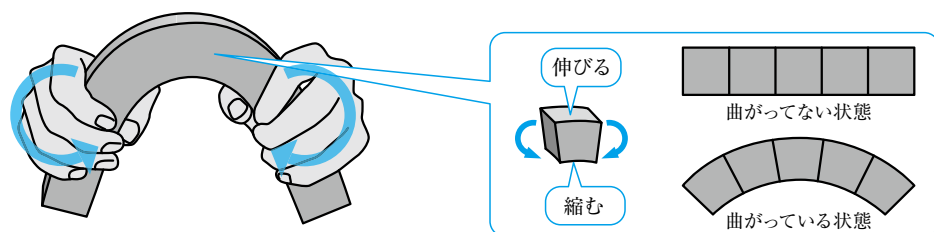


図 2.2.1 曲がった状態

次に図2.2.2のような単純梁で変形を考えます。単純梁の変形は図2.2.1とは曲がり方が上下逆になっています。図2.2.2は上側が縮んで「圧縮側」に、下側が伸びて「引張側」になっ

ています。このような向きに曲がるとき、曲げモーメントを正とします。よって、図2.2.1の曲げモーメントの向きは負です。また、曲げの変形を考えると扇形同士の接触面は、変形後も平面のままであるという仮定を採用します。すなわち正面から見たとき、変形前に引いた直線は、変形後も直線のままであるということです。これを平面保持の仮定といいます。また、上側が縮んで下側が伸びているのであれば、その間には長さが変わっていない位置があるはずで、その位置を中立軸といいます。太さを持つ部材を1本の線でモデル化するとき、この中立軸の位置に線を引きます。この線を材軸といいます。

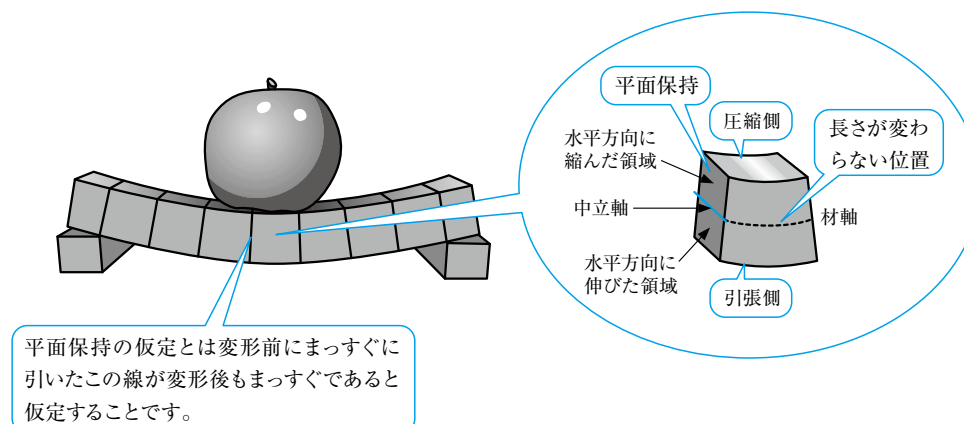


図 2.2.2 単純梁の変形

(2) 曲がった梁の断面内の応力度とひずみ度

図2.2.2のように曲がった梁において、長さ dx の要素を図2.2.3のように取り出して考えます。

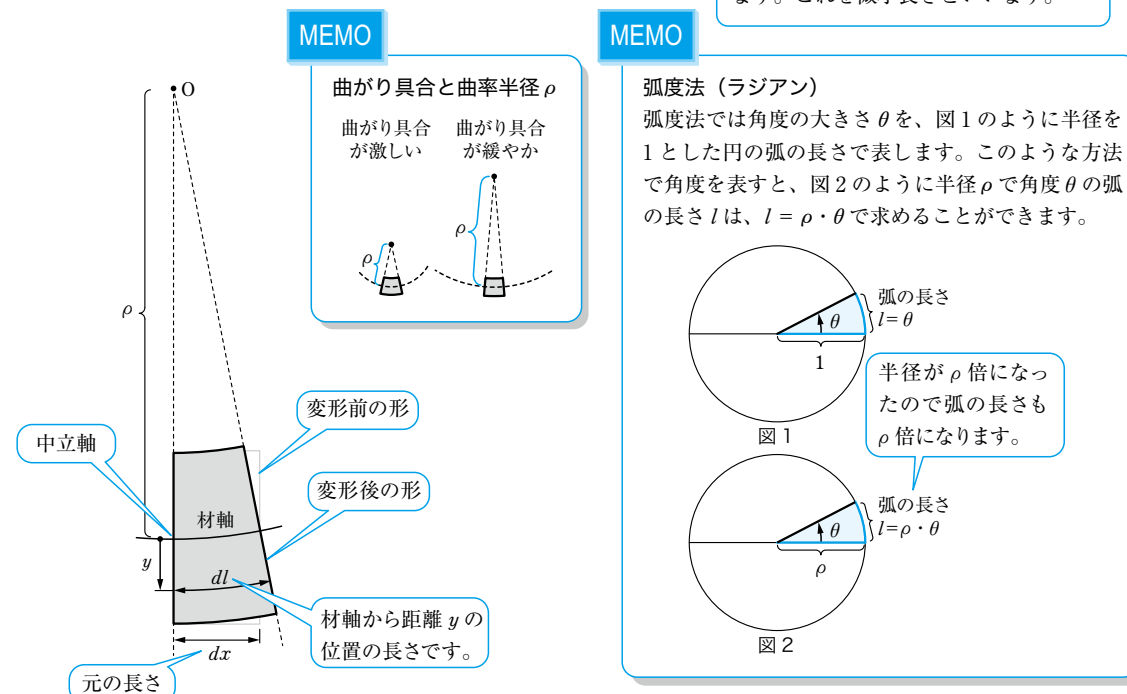


図 2.2.3 長さ dx の要素の変形

2.3 座屈

1 座屈とは

図 2.3.1 のように棒状の部材に圧縮力を加え、その圧縮力を徐々に大きくしていくと、部材は圧縮方向につぶれる前に弓なりに曲がります。この現象を**座屈**といいます。

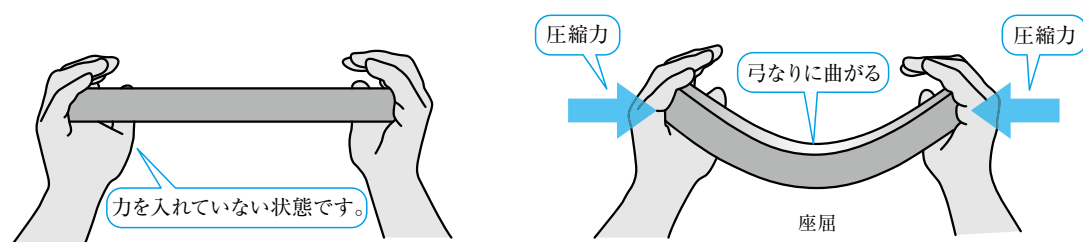


図 2.3.1 座屈

2 座屈荷重

部材に作用する圧縮力の大きさを 0 から少しずつ大きくしたとき、圧縮力がある大きさに達して部材が座屈した場合、そのときの圧縮力を**座屈荷重**といいます。

座屈は圧縮力により部材が曲がる現象です。しかし、計算上は図 2.3.2 のような真っすぐな部材にいくら圧縮力を作用させても、曲がることはありません。

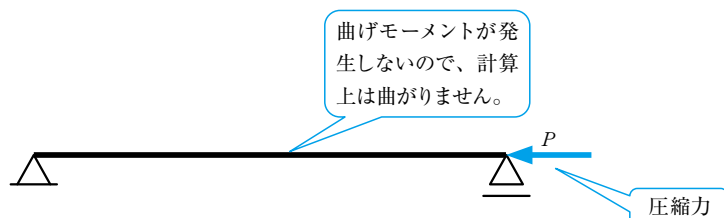


図 2.3.2 まっすぐな部材に圧縮力を作用させた場合

そこで、図 2.3.3 のように、部材を手であらかじめ曲がった状態にしてから圧縮力を作用させます。そして、手を離したら部材がどうなるか考えてみましょう。

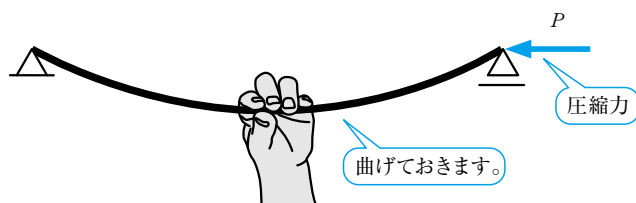


図 2.3.3 曲げた部材に圧縮力を作用させた場合

図 2.3.4 に示すように圧縮力が P_1 であったとき、手を離したら部材がまっすぐに戻ろうとするなら、 P_1 は座屈荷重より小さい力であったということが出来ます。図 2.3.5 に示すように圧縮力が P_2 であったとき、手を離したら部材がどんどん曲がっていくなら、 P_2 は座屈荷重より大きい力であったということが出来ます。

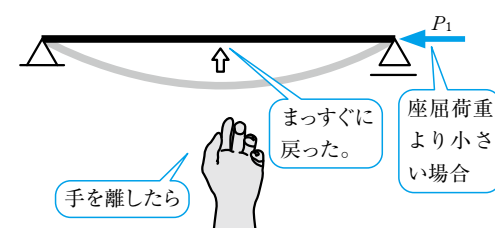


図 2.3.4 座屈荷重より小さな圧縮力

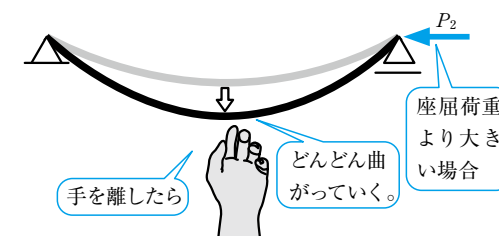


図 2.3.5 座屈荷重より大きな圧縮力

3 座屈荷重の大きさ

では、圧縮力 P が座屈荷重であった場合はどうなるでしょうか。理屈としては、まっすぐにも戻らないし、どんどん曲がってもいかず、その状態のままということになるでしょうが、実際にはそのような微妙な状態をつくり出すことは困難です。しかし、計算上は、そのままの状態になると仮定するとよいでしょう。

ここで、図 2.3.6 に示すように部材があらかじめ曲げられていたとします。左端から距離 x の点を X とし、その点のたわみを y とします。この部材に圧縮力 P を加え、点 X の曲げモーメントを M とすれば、 M は次式で表せます。

$$M = P \cdot y \quad \dots\dots\dots ①$$

部材に生じる曲げモーメントは図 2.3.7 のようになるでしょう。次に、図 2.3.7 の曲げモーメントが生じている部材がどのように変形するか考えます。図 2.3.7 の曲げモーメントによる点 X のたわみが y' になるとします。圧縮力 P が座屈荷重より小さい場合は、図 2.3.8 (a) に示すように、 y' が y より小さくなり、 P が座屈荷重より大きい場合は、図 2.3.8 (b) に示すように、 y' が y より大きくなります。そのように考えると、図 2.3.4 と図 2.3.5 の現象を表すことができます。したがって、 y' と y が等しくなるとき、圧縮力 P が座屈荷重になると考えればよいでしょう。

31 ページの式②で曲率 ϕ とたわみ y の間に次のような関係があることを示しました。

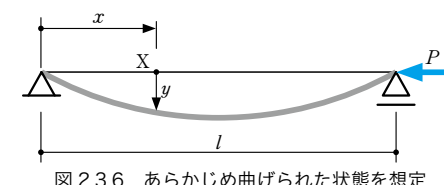


図 2.3.6 あらかじめ曲げられた状態を想定

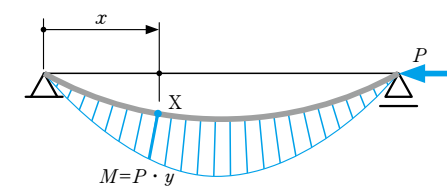
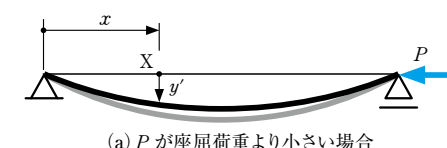
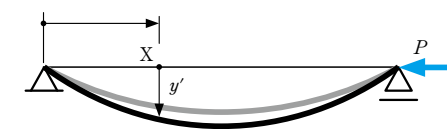


図 2.3.7 図 2.3.6 の曲げモーメント図



(a) P が座屈荷重より小さい場合



(b) P が座屈荷重より大きい場合

図 2.3.8 図 2.3.7 の曲げモーメントによるたわみ y'

3.1 構造物を解くための仮定と変形の概略

1 微小変形理論

構造物を解くとき、実際の現象をそのまま扱うのはなかなか難いため、問題を簡単にするさまざまな仮定が設けられています。ここでは、その1つである**微小変形**と呼ばれる考え方について説明します。

(1) 投影長さは変わらない

図3.1.1に示す片持ち梁を例にして考えます。片持ち梁の先端に力が作用したとき、片持ち梁の先端は荷重が作用している鉛直方向に移動します。ところが、梁は軸方向力が作用しないため全長は変わらず、実際には片持ち梁の先端は水平方向にも少しだけ移動します。

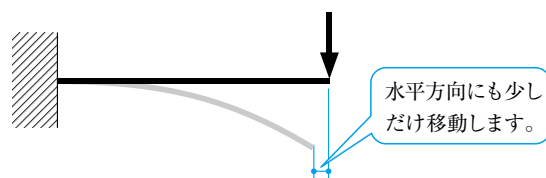


図 3.1.1 片持ち梁の先端の移動

しかし、建築で扱う構造物は力が作用しても、変形がとて小くなるように設計されているため、この水平方向への移動は無視されます。たとえば、建築で梁を設計する場合、梁のたわみは梁の長さの1/250以下におさえます。これは、長さ2.5mの梁であれば、たわみは最大で10mmということになります。もし、梁のたわんだ形が円弧だと仮定して全長が2.5mのまま変わらなかったとすると、図3.1.2に示すように梁の水平投影長さはだいたい2.499973mになります。たわむ前の梁の水平投影長さ2.5mとの差 Δ は、

$$\Delta = 2,500 \text{ mm} - 2,499.973 \text{ mm} = 0.027 \text{ mm}$$

梁が鉛直方向に10mmたわんでも水平方向の移動は0.027mmで、その比はおおよそ370:1ととても小さな量です。梁の長さ2.5mとの割合で表すとおよそ10万分の1でしかありません。

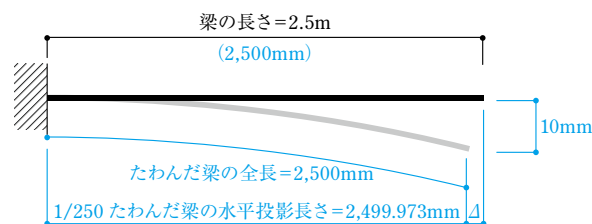


図 3.1.2 たわんだ梁の水平投影長さ

そのため図3.1.3に示すように、梁がたわんでも梁の水平投影長さは変わらないと仮定します。このような仮定を**微小変形理論**といいます。

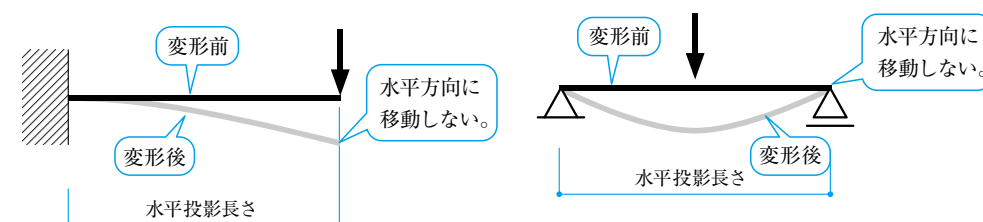
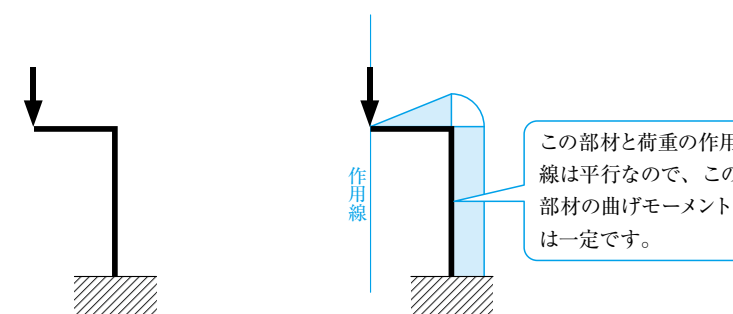


図 3.1.3 変形の前後で梁の水平投影長さは変わらない

63ページのMEMOで示した考え方も微小変形理論であり、ここで説明していることと同じです。

(2) 外力のつり合いと応力のつり合いは変形前の状態で考える

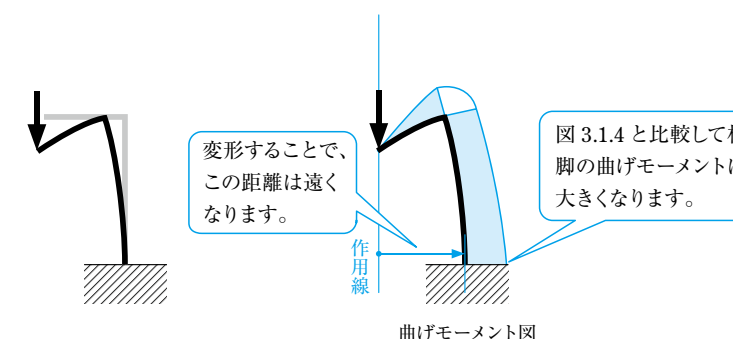
図3.1.4に示す片持ち形式の構造物を例にして考えます。構造物の曲げモーメント図は右のようになります。



曲げモーメント図

図 3.1.4 片持ち形式の構造物の曲げモーメント

しかし、実際にはこの構造物は荷重により、図3.1.5のように変形します。そして、変形した状態で曲げモーメントを考えると、右のようになり、上記の結果と異なった曲げモーメント図になることが想像できるのではないのでしょうか。ただし、図3.1.5の曲げモーメントの大きさを求めるのは容易ではありません。



曲げモーメント図

図 3.1.5 片持ち形式の構造物の変形後の曲げモーメント

そこで、建築で扱う構造物は、力が作用してもその変形はとて小さいと仮定して、変形する前の状態で応力を求めることにしています。反力の計算も同じで、変形する前の状態で求めます。これも、微小変形理論に基づく仮定です。そのため、変形が大きい構造物を扱うときには注意が必要で、微小変形理論では現実との誤差がとて大きくなる場合があります。このような問題は**大変形問題**といいますが、本書では扱いません。

4.1 曲げモーメントからせん断力と軸方向力を求める

構造物に作用する荷重と曲げモーメントがわかっているならば、そこからせん断力と軸方向力が求まります。ここでは、荷重と曲げモーメントからせん断力と軸方向力を求める方法を説明します。そして、

4.2 以降は、構造物の解法で曲げモーメントは求めますが、せん断力と軸方向力は省略します。

1 曲げモーメントから外力とせん断力を求める

例題 1、例題 2 を通して曲げモーメント図から部材に作用する外力とせん断力を求める方法を説明します。

例題 1

図 4.1.1 に示す曲げモーメント図から、部材に作用する外力とせん断力を求めましょう。

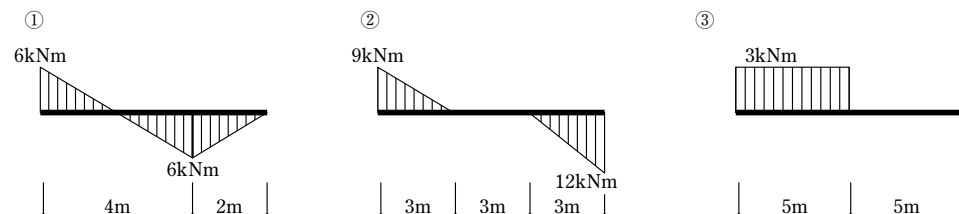


図 4.1.1

考え方

57 ページの 2.4 1 で説明した、「曲げモーメントの傾きはせん断力の大きさを表す」ことを利用すれば、曲げモーメント図からせん断力が求まります。つまり、図 1 に示すように曲げモーメント図が傾いている部分はせん断力が生じ、傾いていない部分にはせん断力が生じません。また、曲げモーメント図が傾く方向と、せん断変形で部材が傾く方向（図中に黒いひし形で示す）は同じです。せん断変形の方法がわかれば、そこに作用するせん断力の方

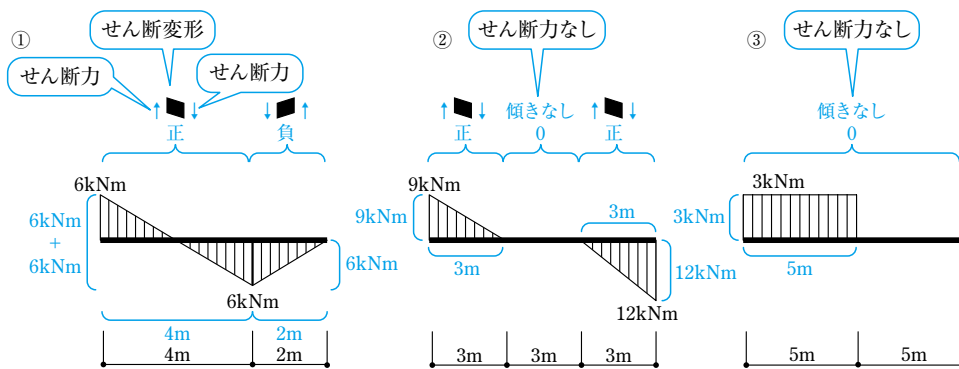


図 1 曲げモーメント図

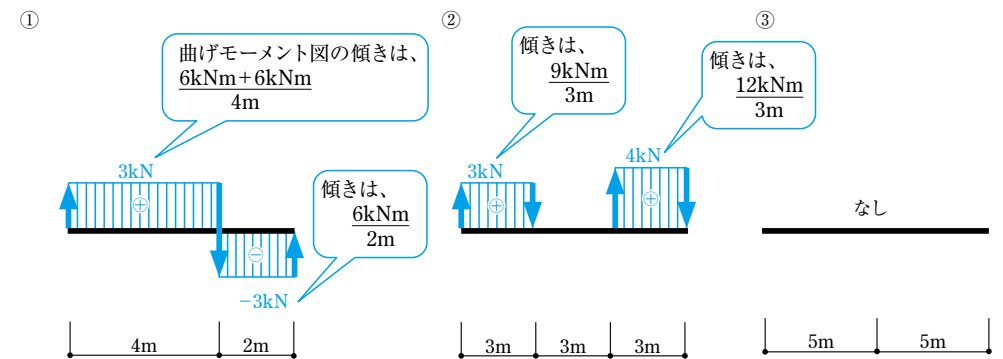


図 2 せん断力図

向もわかります。そのせん断力による偶力の向きが、時計回りであればせん断力は正、反時計回りであれば負になります。

曲げモーメント図の傾きからせん断力の大きさを求めれば、せん断力図は図 2 のようになります。せん断力図がずれている（段差がある）位置

は集中荷重が作用している位置で、そのずれの大きさが集中荷重の大きさです。したがって、図 2 の青い矢印がその位置に作用している集中荷重になります。また、曲げモーメント図のずれの大きさがその位置に作用しているモーメント荷重の大きさです。モーメント荷重の向きは曲げモーメント図がかかっている側が引張側になるように、図 3 に示す向きに作用しています。したがって、部材に作用する外力は図 4 のようになります。



図 3 材の引張側とモーメント荷重の向き

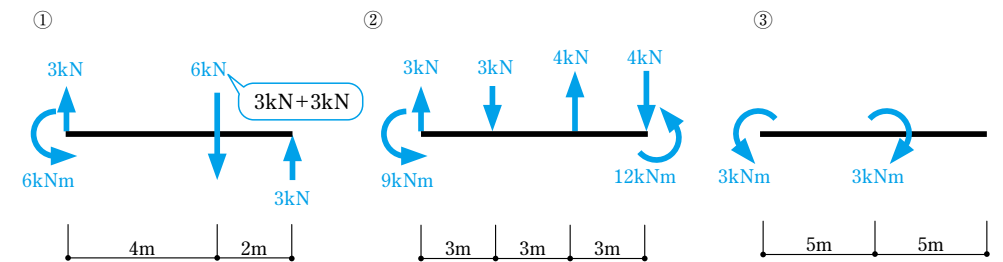
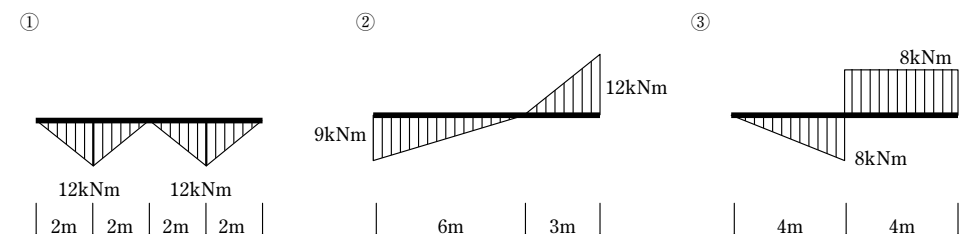


図 4 外力

問題 1

図に示す曲げモーメント図から、部材に作用する外力とせん断力を求めなさい。（解答は 208 ページ）



5.1 仕事

1 仕事とは

(1) 力の移動による仕事

図5.1.1に示すように力 P を作用させて物体が移動したとき、「力の大きさ P 」と「力の作用方向に移動した距離 x 」の積が**仕事 W** です。図5.1.1の場合、力 P は物体に対して仕事 W をした、または、仕事 W をなした、といいます。

$$W=P \cdot x$$

……………①

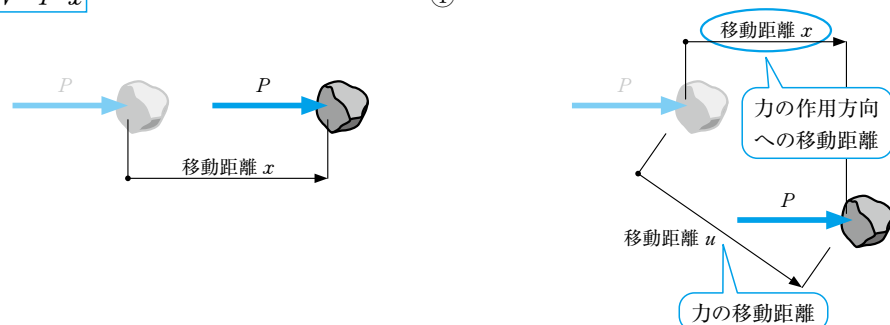


図 5.1.1 力 P の移動による仕事

図5.1.1に示す現象としては物体が移動しますが、式①で移動を考えるのは物体に作用する力 P なので、力が移動したと考えるとよいでしょう。また、力は、力が作用する方向と同じ方向の移動で仕事をするのであって、直交方向にどんなに移動しても、仕事をしたことにはなりません。

(2) 力のモーメントによる仕事

力のモーメントが移動した場合も仕事 W になります。ただし、この場合の移動とは図5.1.2に示すように力のモーメント M が作用する方向に回転した量で、仕事 W は力のモーメント M と回転角 θ の積で表されます。

$$W=M \cdot \theta$$

……………②

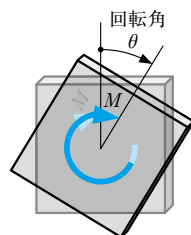


図 5.1.2 力のモーメント M の回転による仕事

(3) 仕事の正と負

力の作用する方向と移動する方向が逆のとき、仕事は負（マイナス）になります。図5.1.3に示す場合はいずれの仕事も負になります。力が1つしか作用していない場合はこのような移動は考えにくいですが、複数の力が作用している場合、他の力の影響を受け、力が図のように移動することがあります。

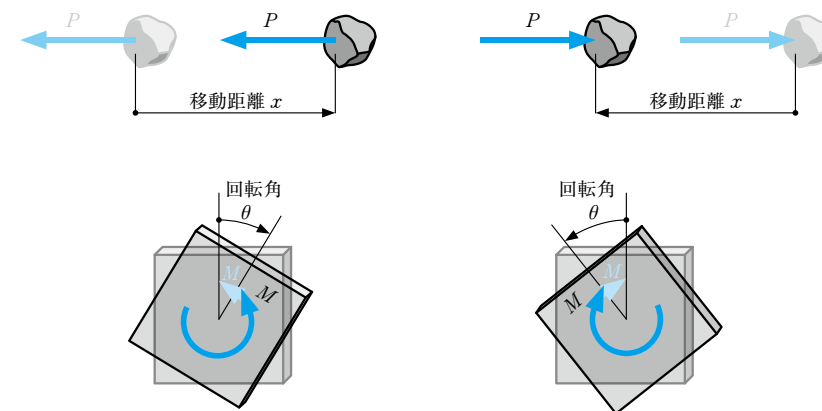


図 5.1.3 負の仕事の例

2 弾性体に対する仕事

弾性の梁に図5.1.4のような力 P を加え、力を加えた点のたわみが δ になったとします。このとき力 P がなす仕事について考えてみましょう。

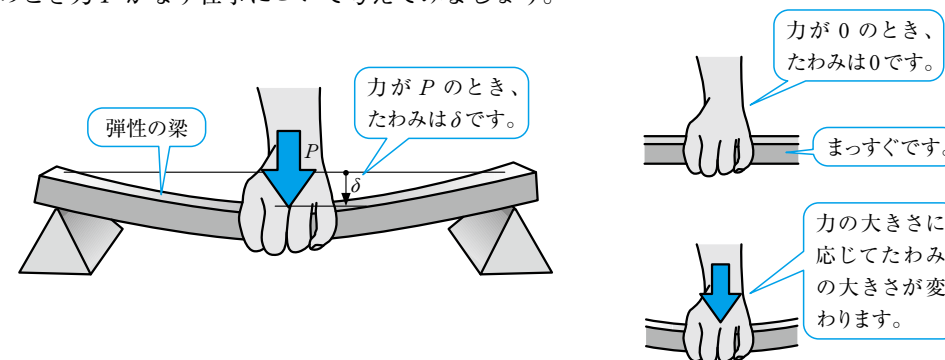


図 5.1.4 弾性体に対する仕事

最初に考えるのは、「仕事 W は $P \cdot \delta$ ではないか」という答えではないでしょうか。もし、はじめから最後まで力の大きさが P のまま、たわみが0から δ まで増えたのであればその答えで正解です。しかし、たわみが0の時点で力の大きさは P ではありません。たわみが0のときの力は0です。力は0から少しずつ大きくなり、それに比例してたわみも少しずつ大きくなり、力の大きさが P になったとき、たわみが δ になります。したがって、力の移動量は δ ですが、力の大きさはその間に0から P へ変化します。0から P へ変化したのでその平均をとって $\frac{P}{2}$ の力が δ 移動したと考えればよいでしょう。したがって、図5.1.4の仕事 W は次のようになります。

$$W=\frac{1}{2} P \delta$$

……………①

また、図5.1.5のような弾性体に対する力のモーメント M の仕事 W は次のようになります。

$$W=\frac{1}{2} M \theta$$

……………②

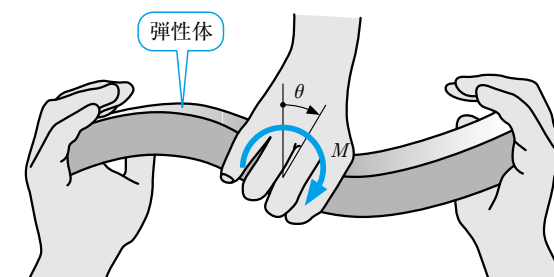


図 5.1.5 弾性体に対する仕事（力のモーメントの場合）